

## 11. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2015)

### 1) Bonusaufgabe

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden beiden Eigenschaften der Kongruenz modulo  $n$ :

(1)  $a \equiv b \pmod{n}$  und  $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

(2)  $a \equiv b \pmod{n}$  und  $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{n}$

b) Auf Eigenschaft (2) beruht die Neunerprobe zur Überprüfung von Additionen. Sind nämlich  $x, y, z$  ganze Zahlen und  $r_x, r_y$  sowie  $r_z$  die entsprechenden Reste nach Division durch 9 (d.h.  $x \equiv r_x \pmod{9}, y \equiv r_y \pmod{9}, z \equiv r_z \pmod{9}$ ), dann gilt:

$$x + y = z \Rightarrow r_x + r_y \equiv r_z \pmod{9} \quad (\text{z.B. } 123 + 45 = 168 \Rightarrow 6 + 0 \equiv 6 \pmod{9}).$$

b<sub>1</sub>) Überprüfen Sie damit die Rechnung  $23.456.789 + 98.765.432 = 122.222.221$ .

b<sub>2</sub>) Die Rechnung  $789 + 658 = 1438$  ist zwar falsch, die Neunerprobe ( $6 + 1 \equiv 7 \pmod{9}$ ) ist dennoch richtig! Wie kann das sein, und welche Fehler erkennt man mittels Neunerprobe also nicht?

2) Bestimmen Sie die Periodenlänge von  $1/17$  mithilfe der Potenzen von 10 modulo 17, bestimmen Sie also den kleinsten Exponenten  $n$ , so dass  $10^n \equiv 1 \pmod{17}$  (s.a. Vorlesung).

### 3) Bonusaufgabe

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0	2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
3	0	3	6	9	12	2	5						
4	0	4	8	12									
5	0	5	10	2									
6	0	6	12	5									
7	0	7	1										
8	0	8	3										
9	0	9	5										
10	0	10	7										
11	0	11	9										
12	0	12	11										

a) Vervollständigen Sie die Multiplikationstabelle für  $C_{13}$ , und bestimmen Sie damit die Kehrwerte der Zahlen 2, 3, ..., 12 ( $1 \oplus 2 = \_$ ,  $1 \oplus 3 = \_$ , ...,  $1 \oplus 12 = \_$ ).

b) Bei der schriftlichen Division von  $1/13$  kommen folgende Reste vor: 1, 10, 9, 12, 3, 4 (in dieser Reihenfolge). Zeigen Sie, dass diese Teilmenge von  $C_{13}$  ebenfalls abgeschlossen ist bzgl. Multiplikation und Kehrwertbildung in  $C_{13}$ .

(Markieren Sie hinsichtlich der Multiplikation die entsprechenden Einträge in der obigen Tabelle)

#### 4) **Bonusaufgabe**

- a) Die obige Reste-Menge der Division  $1/13$  ergibt sich auch aus den Potenzen von 10:  $10^0=1$ ,  $10^1=10$ ,  $10^2=10 \otimes 10=9$  etc. Die Menge besteht also aus den 10er-Potenzen (modulo 13). Zeigen Sie, dass man alle Zahlen von 1 bis 13 als Potenzen einer geeigneten Zahl aus  $C_{13}$  erzeugen kann.
- b) Ermitteln Sie die Reste, die bei der schriftlichen Division  $2/13$  vorkommen. Ist die Multiplikation unter ihnen ebenfalls abgeschlossen? Wie kann man Sie geschickt aus den Resten von  $1/13$  berechnen?
- c) Im 5er-System sind die Reste von  $1/13$ : 1, 5, 12, 8 (im 3er-System: 1, 3, 9).
- Von welcher Zahl sind das die Potenzen (modulo 13)?
  - Welche Reste-Mengen kommen bei Rechnungen  $n/13$  im 5er-System (im 3er-System) noch vor, und wie kann man sie aus der Reste-Menge von  $1/13$  berechnen?