Michael Johann

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2015)

1) Bonusaufgabe

Das Produkt $13 \cdot 17$ lässt sich berechnen, indem man das Produkt der beiden Nachbarzehner ($20 \cdot 10$) und das Produkt der Einer ($3 \cdot 7$) addiert: $13 \cdot 17 = 20 \cdot 10 + 3 \cdot 7$.

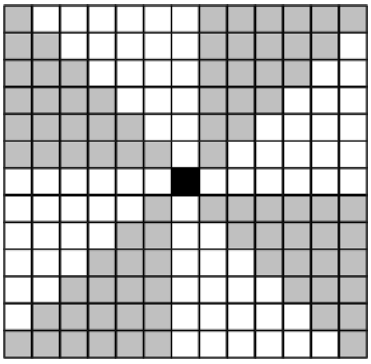
Weitere Beispiele:

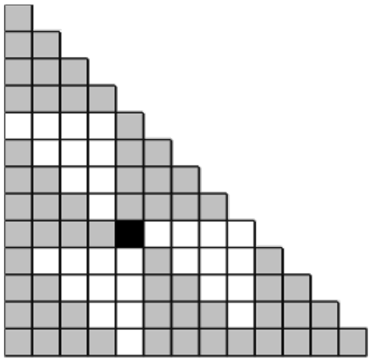
$12 \cdot 18$	=	$20 \cdot 10$	+	$2 \cdot 8$
$14 \cdot 16$	=	$20 \cdot 10$	+	$4 \cdot 6$
$34 \cdot 36$	=	$40 \cdot 30$	+	$4 \cdot 6$
$63 \cdot 67$	=	$70 \cdot 60$	+	$3 \cdot 7$

- Verwenden Sie ein Rechteck aus $13 \cdot 17$ Punkten (o.Ä.), um diesen Rechenweg zu begründen. (Schneiden Sie einen geeigneten Streifen davon ab, um ihn woanders wieder anzulegen.)
- Formulieren Sie mit Variablen eine allgemeine Rechenregel dazu. (Eine zweistellige Zahl können Sie allgemein als 10a + b notieren, wobei a für die Zehnerziffer und b für die Einerziffer steht)

2) Bonusaufgabe

a) Die beiden Zeichnungen dienen zur Begründung zweier Gleichungen über Dreieckszahlen.
Wie lauten diese Gleichungen jeweils? (Tipp: Bezeichnen Sie mit Δ_n die Anzahl der Kästchen in einem Dreieck aus $1+2+...+n$ Kästchen, und verwenden Sie dieses n um die Anzahl aller Kästchen in der Gesamtfigur anzugeben.)



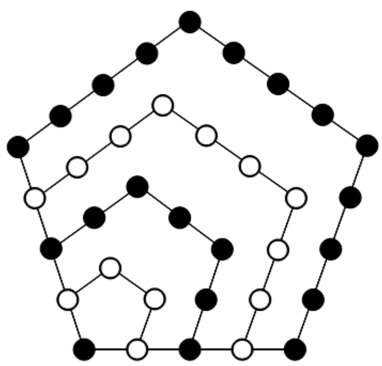


b) Unter den Dreieckszahlen gibt es unendlich viele Quadratzahlen, denn $\Delta_1 = 1$ ist eine Quadratzahl und es gilt: $\Delta_{8\Delta_n} = \frac{1}{2} \cdot 8\Delta_n \cdot (8\Delta_n + 1) = 4\Delta_n \cdot (2n+1)^2$

Erläutern Sie dies Gleichung mithilfe von Teil a) und der Summenformel für die ersten n Zahlen. Berechnen Sie außerdem damit die nächsten beiden Dreieckszahlen, die auch Quadratzahlen sind. (Zur Information: Es gibt noch andere Dreieckszahlen, die ebenfalls Quadratzahlen sind, aber nicht nach diesem Schema berechnet werden.)

3) Beweisen Sie mithilfe von figurierten Zahlen, dass gilt:
i) $3\Delta_n + \Delta_{n-1} = \Delta_{2n}$ ii) $3\Delta_n + \Delta_{n+1} = \Delta_{2n+1}$ iii) $\Delta_{n-1} + 6\Delta_n + \Delta_{n+1} = (2n+1)^2$

4) Pentagonalzahlen erhält man analog zur Folge der Quadratzahlen durch sukzessives Anfügen von Winkelhagen derart, dass immer größere Fünfeckmuster entstehen. Ist P_n die n-te Pentagonalzahl ($P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, ...), dann gilt: $P_n = n + 3\Delta_{n-1}$
Begründen Sie diese Formel an nebenstehendem Punktmuster.



5) Bonusaufgabe

a) Eine natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe all ihrer Teiler ist außer ihr selbst; Beispiele sind 6 = 1 + 2 + 3 oder 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Ist $p = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$ eine Primzahl,
dann ist $p \cdot 2^n$ eine vollkommene Zahl.

(Euklid: Elemente, IX, 36)

Vervollständigen Sie folgenden Beweis dieser Aussage:

Es gibt es zwei unterschiedliche Arten von Teilern der Zahl $p \cdot 2^n$:

- zum einen die Zweierpotenzen $1, 2, 4, \ldots, 2^n$

- und zum anderen ____

Die Summe all dieser Teiler außer der Zahl $2^n \cdot p$ selbst ist:

____

____

b) Zeigen Sie: Die obige, vollkommene Zahl $p \cdot 2^n$ ist eine Dreieckszahl.

6) Berechnen Sie die Summe 301 + 308 + 315 + ... + 399.

Allgemein: Berechnen Sie die Summe $a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + nb)$.

7) Berechnen Sie die unendlichen Summen

a) 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... b) 1/5 + 1/25 + 1/125 + ...