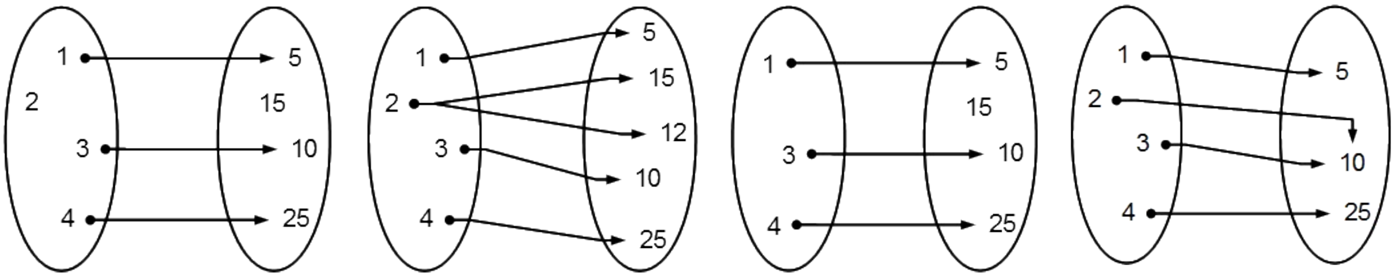
Michael Johann

4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2015)

1) Bonusaufgabe

Handelt es sich bei den folgenden Zuordnungen um Abbildungen? Und wenn ja: Sind sie bijektiv? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



2) Bonusaufgabe

Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung gibt

a) von $\mathbb{Z}$ nach {2, 4, 6, 8, …},

b) von $\mathbb{Z}$ in die Menge der Brüche n/m mit n, m $\in \mathbb{N}$.
(Unter Verwendung des 1. Cantorschen Diagonalverfahrens.)

3) Geben Sie alle bijektiven Abbildungen der Menge A={a, b, c} in die Menge B={1, 2, 3} an.

4) Bonusaufgabe

<u>Definition:</u> Die *Potenzmenge* P(M) einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, also P(M) = { X | X $\subseteq$ M }.
<u>Bsp.:</u> Für M={ 1, 2, 3} ist P(M) = { { }, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3} }

Die Potenzmenge von {a,b,c} hat doppelt so viele Elemente wie die Potenzmenge von {a,b}: $|P(\{a,b,c\})| = 2 \cdot |P(\{a,b\})|$. Denn $P(\{a,b,c\})$ lässt sich wie folgt in zwei gleich große, disjunkte* Teilmengen zerlegen, wovon die eine $P(\{a,b\})$ ist:

$P(\{a,b,c\}) = \{\{\},\{a\},\{b\},\{a,b\}\} \cup \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

a) Zeigen Sie in gleicher Weise, dass die Potenzmenge von {a,b,c,d} doppelt so viele Elemente hat wie die Potenzmenge von {a,b,c}: $|P(\{a,b,c,d\})| = 2 \cdot |P(\{a,b,c\})|$.

Tipp: Notieren Sie die beiden disjunkten Teilmengen von P({a,b,c,d}), und beachten Sie, dass es eine besonders nahe liegende Bijektion zwischen ihnen gibt.

(*) disjunkt: die Mengen haben keinerlei gemeinsame Elemente

b) Allgemein gilt:

Ist M eine endliche Menge und m ein Element darin, dann hat die Potenzmenge von M doppelt so viele Elemente wie die Potenzmenge von M ohne m: $|P(M)| = 2 \cdot |P(M \setminus \{m\})|$.

Vervollständigen Sie den folgenden Beweis dieser Aussage:

Wir zerlegen $P(M)$ in die folgenden beiden Teilmengen:

- $P(M \setminus \{m\}) = \{T \subseteq M \mid \text{............}\}$ (Teilmengen von M, in denen m nicht vorkommt.)
- $B = \{T \subseteq M \mid \text{............}\}$ (Teilmengen von M, in denen ....)

Wegen $P(M) = P(M \setminus \{m\}) \cup B$ und $P(M \setminus \{m\}) \cap B = \emptyset$ ist $|P(M)| =$ ....

Da weiterhin $f(X) = X \cup \{m\}$ eine bijektive Abbildung von .... nach .... ist, gilt $|P(M \setminus \{m\})| = |\text{.......}|$. Deshalb hat $P(M)$ doppelt so viele Elemente wie jede der beiden Mengen, und es ist $|P(M)| = 2 \cdot |P(M \setminus \{m\})|$.