

7. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2015)

1) Bonusaufgabe

Im Zehnersystem gilt $21 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$, was man an der Stellentafel z.B. wie in der Grafik veranschaulicht.

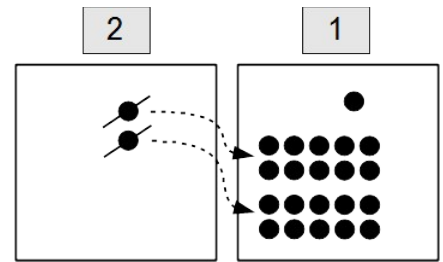
a) Erläutern Sie entsprechend die Zahl 1021_3 .

b) Allgemein: Ist $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ eine Zahl in einem

Stellenwertsystem zur Basis b ($0 \leq a_i \leq b-1$), dann gilt:

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = \sum_{i=0}^n a_i \cdot b^i = ? + ? + ? + \dots + ?$$

c) Erklären Sie an der Stellentafel, weshalb die k -te Stelle den Wert b^{k-1} hat.



2) Bonusaufgabe

Man kann die geometrische Reihe $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$ als die Zahl 1111_3 im 3er-System auffassen. Multipliziert man sie mit 2 und addiert anschließend 1, so ist das Ergebnis 10000_3 ($= 3^4$). Also ist $2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + 1 = 3^4$ oder

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = \frac{3^4 - 1}{2}.$$

a) Zeigen Sie ebenso, dass $7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 = \frac{7^4 - 1}{6}$.

b) Verallgemeinern Sie diesen Gedanken auf geometrische Reihen $b^0 + b^1 + b^2 + \dots + b^n$ mit einer natürlichen Zahl $b \geq 2$. Zeigen Sie also, dass $b^0 + b^1 + b^2 + \dots + b^n = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$ ist.

$$\begin{aligned} 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 &= 1111_3 \quad ; | \cdot 2 \\ 2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) &= 2222_3 \quad ; | + 1 \\ 2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + 1 &= 10000_3 \\ &= 1 \cdot 3^4 \end{aligned}$$

3) Bonusaufgabe

Betrachten Sie das Vervielfachen einer Zahl hier als wiederholte Addition. Und berechnen Sie so die jeweiligen Vielfachen der angegebenen Zahlen am Abakus.

8er-System:

$$2 \times 666 =$$

$$3 \times 333 =$$

$$5 \times 222 =$$

16er-System:

$$2 \times \text{EEE} =$$

$$4 \times \text{EEE} =$$

$$3 \times 987 =$$

$$6 \times 987 =$$

6x10er-System:

$$2 \times 48;59 =$$

$$4 \times 48;59 =$$

$$8 \times 48;59 =$$

4) Berechnen Sie die Differenz der angegebenen Zahlen

- a) durch Ergänzen am Abakus (und nicht durch ein geeignetes Wegnehmen/Abziehen) und
b) durch Addition der größeren Zahl zum Komplement der kleineren (schriftlich).

2er System:

$$1010 + \quad = \quad 1111$$

$$10 + \quad = \quad 111$$

$$110 + \quad = \quad 11001$$

8er-System:

$$461 + \quad = \quad 753$$

$$775 + \quad = \quad 21011$$

$$4567 + \quad = \quad 12345$$

16er-System:

$$AC9 + \quad = \quad DAF$$

$$FF7 + \quad = \quad 10022$$

6×10er-System:

$$1;42 + \quad = \quad 2;38$$

$$9;57 + \quad = \quad 1;19;03$$