Michael Johann

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2016)

1) Bonusaufgabe

Das Produkt $14 \cdot 16$ lässt sich berechnen, indem man das Produkt der beiden Nachbarzehner $(20 \cdot 10)$ und das Produkt der Einer $(4 \cdot 6)$ addiert: $14 \cdot 16 = 20 \cdot 10 + 4 \cdot 6$.

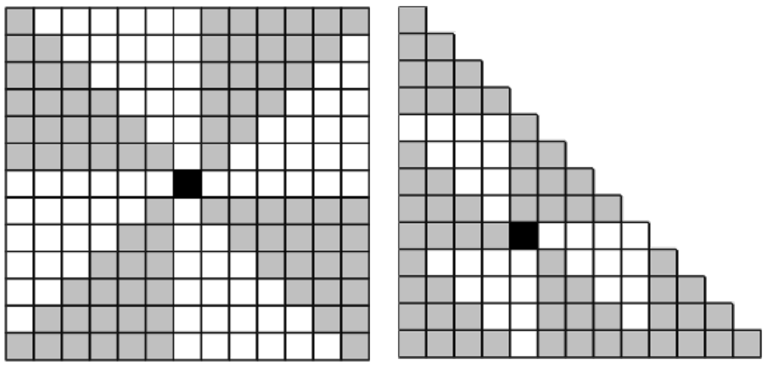
Weitere Beispiele:

$12 \cdot 18 = 20 \cdot 10 + 2 \cdot 8$
$13 \cdot 17 = 20 \cdot 10 + 3 \cdot 7$
$34 \cdot 36 = 40 \cdot 30 + 4 \cdot 6$
$63 \cdot 67 = 70 \cdot 60 + 3 \cdot 7$

- Verwenden Sie ein Rechteck aus $14 \cdot 16$ Punkten (o.Ä.), um diesen Rechenweg zu begründen. (Schneiden Sie einen geeigneten Streifen davon ab, um ihn woanders wieder anzulegen.)
- Formulieren Sie mit Variablen eine allgemeine Rechenregel dazu. (Eine zweistellige Zahl können Sie allgemein als $10a + b$ notieren, wobei a für die Zehnerziffer und b für die Einerziffer steht).

2) Bonusaufgabe

a) Die beiden Zeichnungen dienen zur Begründung zweier Gleichungen über Dreieckszahlen. Wie lauten diese Gleichungen jeweils? (Tipp: Bezeichnen Sie mit Δ_n die Anzahl der Kästchen in einem Dreieck aus $1+2+...+n$ Kästchen, und verwenden Sie dieses n um die Anzahl aller Kästchen in der Gesamtfigur anzugeben.)



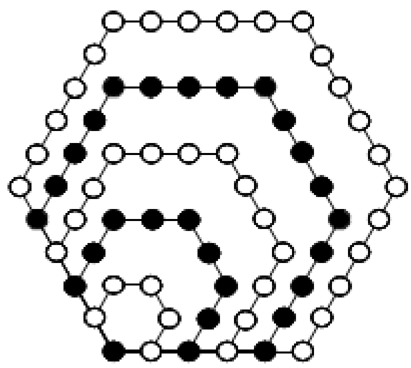
b) Unter den Dreieckszahlen gibt es unendlich viele Quadratzahlen, denn $\Delta_1 = 1$ ist eine Quadratzahl und es gilt:

$$\Delta_{8\Delta_n} = \frac{1}{2} \cdot 8\Delta_n \cdot (8\Delta_n + 1) = 4\Delta_n \cdot (2n+1)^2$$

Erläutern Sie dies Gleichung mithilfe von Teil a) dieser Aufgabe und der Summenformel für die ersten n Zahlen. Berechnen Sie außerdem damit die nächsten beiden Dreieckszahlen, die auch Quadratzahlen sind. (Es gibt noch andere Dreieckszahlen, die ebenfalls Quadratzahlen sind, aber nicht nach diesem Schema berechnet werden. Z.B. ist $\Delta_{49} = 1+2+...+49 = \frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 50 = 49 \cdot 25 = (7 \cdot 5)^2$)

3) Begründen Sie mithilfe figurierter Zahlen, dass gilt:
i) $3\Delta_n + \Delta_{n-1} = \Delta_{2n}$ ii) $3\Delta_n + \Delta_{n+1} = \Delta_{2n+1}$ iii) $\Delta_{n-1} + 6\Delta_n + \Delta_{n+1} = (2n+1)^2$

4) Hexagonalzahlen erhält man analog zur Folge der Quadratzahlen durch sukzessives Anfügen von Winkelhagen derart, dass immer größere Sechseckmuster entstehen. Ist H_n die n-te Hexagonalzahl ($H_1 = 1$, $H_2 = 6$, $H_3 = 15$, ...), dann gilt: $H_n = n + 4\Delta_{n-1}$
Begründen Sie diese Formel an nebenstehendem Punktmuster.



5) Bonusaufgabe

a) Eine natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe all ihrer Teiler ist außer ihr selbst; Beispiele sind $6 = 1 + 2 + 3$ oder $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Ist $p = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$ eine Primzahl,
dann ist $p \cdot 2^n$ eine vollkommene Zahl.
(Euklid: Elemente, IX, 36)

Vervollständigen Sie folgenden Beweis:
Es gibt es zwei unterschiedliche Arten von Teilern der Zahl $p \cdot 2^n$:
- zum einen die Zweierpotenzen $1, 2, 4, \ldots, 2^n$
- und zum anderen ______________________________

Die Summe all dieser Teiler außer der Zahl $2^n \cdot p$ selbst ist:

____

____

b) Zeigen Sie: Die obige, vollkommene Zahl $p \cdot 2^n$ ist eine Dreieckszahl.

6) Berechnen Sie die Summe $211 + 218 + 225 + \ldots + 295$.
Allgemein: Berechnen Sie die Summe $a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + nb)$.

7) Berechnen Sie die unendlichen Summen
a) $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$ b) $1/3 + 1/9 + 1/27 + \ldots$