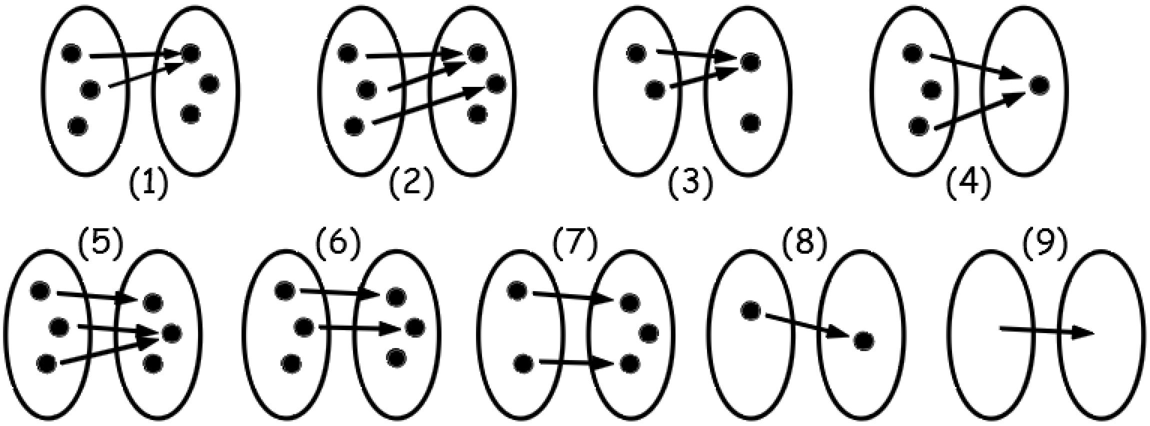
Michael Johann

4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2016)

1) Bonusaufgabe

Markieren Sie in der Tabelle, welche Eigenschaften die Zuordnungen (1) bis (9) jeweils haben.



	Zuordnung	Abbildung	injektiv	surjektiv	bijektiv
(1)					
(2)					
(3)					
(4)					
(5)					
(6)					
(7)					
(8)					
(9)					

2) Bonusaufgabe

Geben Sie alle bijektiven Abbildungen der Menge A={a, b, c} in die Menge B={1, 2, 3} an.

3) Bonusaufgabe

Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung gibt

a) von $\mathbb{Z}$ nach {2, 4, 6, 8, …},

b) von $\mathbb{Z}$ in die Menge der Brüche n/m mit n, m $\in \mathbb{N}$. (Unter Verwendung des 1. Cantorschen Diagonalverfahrens.)

Definition: Die *Potenzmenge* P(M) einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, also $P(M) = \{ X \mid X \subseteq M \}$.

Bsp.: Für $M=\{ 1, 2, 3\}$ ist $P(M) = \{ \{ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$

4) Bonusaufgabe

Die Potenzmenge von {a,b,c} hat doppelt so viele Elemente wie die Potenzmenge von {a,b}: $|P(\{a,b,c\})| = 2 \cdot |P(\{a,b\})|$. Denn $P(\{a,b,c\})$ lässt sich wie folgt in zwei gleich große, disjunkte* Teilmengen zerlegen, wovon die eine $P(\{a,b\})$ ist:

$P(\{a,b,c\}) = \{\{\},\{a\},\{b\},\{a,b\}\} \cup \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

a) Zeigen Sie in gleicher Weise, dass die Potenzmenge von {a,b,c,d} doppelt so viele Elemente hat wie die Potenzmenge von {a,b,c}: $|P(\{a,b,c,d\})| = 2 \cdot |P(\{a,b,c\})|$.

Tipp: Notieren Sie die beiden disjunkten Teilmengen von P({a,b,c,d}), und beachten Sie, dass es eine besonders nahe liegende Bijektion zwischen ihnen gibt.

b) Allgemein gilt:

Ist M eine endliche Menge und m ein Element darin, dann hat die Potenzmenge von M doppelt so viele Elemente wie die Potenzmenge von M ohne m: $|P(M)| = 2 \cdot |P(M \setminus \{m\})|$.

Vervollständigen Sie den folgenden Beweis dieser Aussage:

Wir zerlegen $P(M)$ in die folgenden beiden Teilmengen:

- $P(M \setminus \{m\}) = \{T \subseteq M \mid ....\}$ (Teilmengen von M, in denen m nicht vorkommt.)
- $B = \{T \subseteq M \mid ....\}$ (Teilmengen von M, in denen ....)

Wegen $P(M) = P(M \setminus \{m\}) \cup B$ und $P(M \setminus \{m\}) \cap B = \emptyset$ ist $|P(M)| =$ ....

Da weiterhin $f(X) = X \cup \{m\}$ eine bijektive Abbildung von .... nach .... ist, gilt $|P(M \setminus \{m\})| = |.......|$. Deshalb hat $P(M)$ doppelt so viele Elemente wie jede der beiden Mengen, und es ist $|P(M)| = 2 \cdot |P(M \setminus \{m\})|$.

(*) disjunkt: die Mengen haben keinerlei gemeinsame Elemente