Michael Johann

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2017)

1) Das Produkt $14 \cdot 16$ lässt sich berechnen, indem man das Produkt der beiden Nachbarzehner ($20 \cdot 10$) und das Produkt der Einer ($4 \cdot 6$) addiert: $14 \cdot 16 = 20 \cdot 10 + 4 \cdot 6$.

Weitere Beispiele:

$12 \cdot 18$	=	$20 \cdot 10$	+	$2 \cdot 8$
$13 \cdot 17$	=	$20 \cdot 10$	+	$3 \cdot 7$
$34 \cdot 36$	=	$40 \cdot 30$	+	$4 \cdot 6$
$63 \cdot 67$	=	$70 \cdot 60$	+	$3 \cdot 7$

- Verwenden Sie ein Rechteck aus $14 \cdot 16$ Punkten (o.Ä.), um diesen Rechenweg zu begründen.
  (Schneiden Sie – gedanklich – einen geeigneten Streifen davon ab, um ihn woanders wieder anzulegen.)
- Formulieren Sie mit Variablen eine allgemeine Rechenregel dazu.
  (Eine zweistellige Zahl können Sie allgemein als 10a + b notieren, wobei a für die Zehnerziffer und b für die Einerziffer steht).

2) Ist Q_n die n-te Quadratzahl (= n^2) und Δ_n die n-te Dreieckszahl (= $1+2+...+n$), dann gilt

$Q_n = n + 2\Delta_{n-1}$ und

$Q_n = \Delta_n + \Delta_{n-1}$

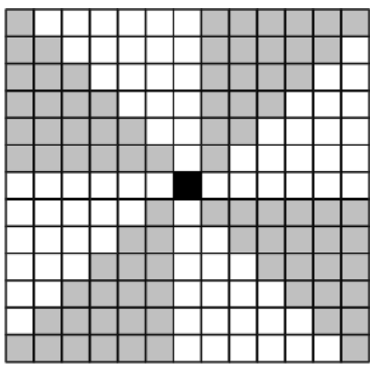
Begründen Sie diese Zusammenhänge an Punktmustern.

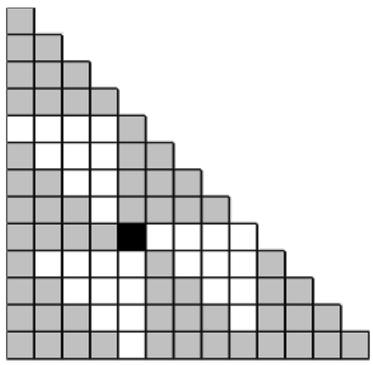
3) Finden Sie eine Formel mit Dreieckszahlen für die Summe

$$1 + 2 + ... + (n - 1) + n + (n - 1) + ... + 2 + 1$$

und begründen Sie diese Formel an Punktmustern.

4a) Die beiden Zeichnungen dienen zur Begründung zweier Gleichungen über Dreieckszahlen.
Wie lauten diese Gleichungen jeweils?
(Tipp: Bezeichnen Sie mit Δ_n die Anzahl der Kästchen in einem Dreieck aus $1+2+...+n$ Kästchen, und verwenden Sie dieses n um die Anzahl aller Kästchen in der Gesamtfigur anzugeben.)



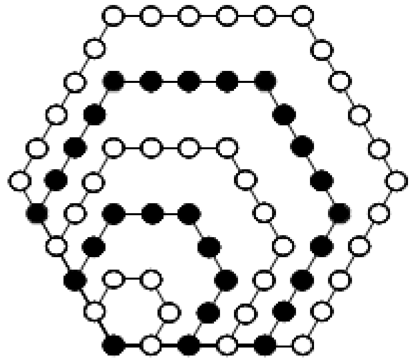


b) Unter den Dreieckszahlen gibt es unendlich viele Quadratzahlen, denn $\Delta_1 = 1$ ist eine Quadratzahl und es gilt:

$$\Delta_{8\Delta_n} = \frac{1}{2}\cdot 8\Delta_n \cdot (8\Delta_n+1) = 4\Delta_n \cdot (2n+1)^2$$

Erläutern Sie dies Gleichung mithilfe von Teil a) dieser Aufgabe und der Summenformel für die ersten n Zahlen. Berechnen Sie außerdem damit die nächsten beiden Dreieckszahlen, die auch Quadratzahlen sind. (Es gibt noch andere Dreieckszahlen, die ebenfalls Quadratzahlen sind, aber nicht nach diesem Schema berechnet werden. Z.B. ist $\Delta_{49} = 1+2+...+49 = \frac{1}{2}\cdot 49\cdot 50 = 49\cdot 25 = (7\cdot 5)^2$)

5) Hexagonalzahlen erhält man analog zur Folge der Quadratzahlen durch sukzessives Anfügen von Winkelhagen derart, dass immer größere Sechseckmuster entstehen. Ist H_n die n-te Hexagonalzahl ($H_1 = 1$, $H_2 = 6$, $H_3 = 15$, ...), dann gilt: $H_n = n + 4\Delta_{n-1}$
Begründen Sie diese Formel an nebenstehendem Punktmuster.



6a) Eine natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe all ihrer Teiler ist außer ihr selbst;
Beispiele sind 6 = 1 + 2 + 3 oder 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Ist $p = 1 + 2 + 4 + ... + 2^n$ eine Primzahl,
dann ist $p \cdot 2^n$ eine vollkommene Zahl.
(Euklid: Elemente, IX, 36)

Vervollständigen Sie folgenden Beweis:
Es gibt es zwei unterschiedliche Arten von Teilern der Zahl $p \cdot 2^n$:
- zum einen die Zweierpotenzen $1, 2, 4, ..., 2^n$
- und zum anderen ______________________________

Die Summe all dieser Teiler außer der Zahl $2^n \cdot p$ selbst ist:

____

____

b) Zeigen Sie: Die obige, vollkommene Zahl $p \cdot 2^n$ ist eine Dreieckszahl.

7) Berechnen Sie die Summe 211 + 218 + 225 + ... + 295.
Allgemein: Berechnen Sie die Summe $a + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + nb)$.

8) Berechnen Sie die unendlichen Summen
a) 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...   b) 1/3 + 1/9 + 1/27 + ...