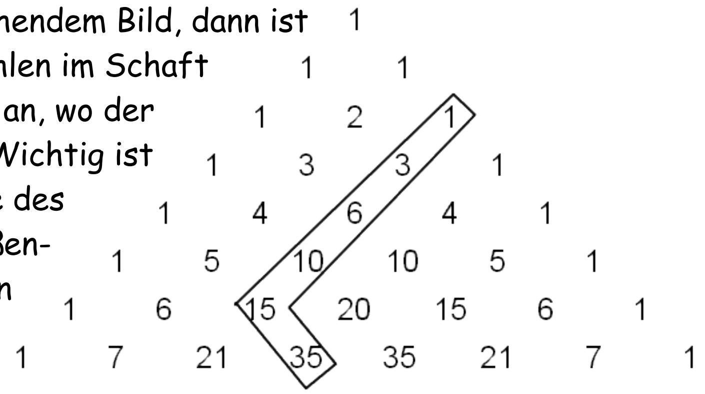
Michael Johann

3. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2017)

1) Fasst man Zahlen im Pascal'schen Dreieck so zusammen, dass die Kontur an einen Eishockeyschläger erinnert, wie in nebenstehendem Bild, dann ist die Zahl in der Kelle (35) die Summe der Zahlen im Schaft (1+3+6+10+15). Dabei kommt es nicht darauf an, wo der Eishockeyschläger liegt und wie lang er ist. Wichtig ist nur, dass der Schaft bis zu einer Außenseite des Dreiecks reicht und parallel zur anderen Außenseite ist; außerdem muss die Kelle nach unten gerichtet sein und darf nur eine Zahl beinhalten.



Beweisen Sie diese Regel durch vollständige Induktion! (Tipp: Die Zahlen im Schaft seien $s_1,\ldots,s_n$ und die Zahl in der Kelle sei k.)

2) Zeigen Sie: Das Ausmultiplizieren von $(a+b+c)^5$ ergibt $\binom{3+5-1}{5}$ = 21 Summanden mit unterschiedlichen Exponenten.
Begründen Sie also an diesem Beispiel die allgemeine Formel für Kombinationen mit Wiederholungen. (Tipp: Die Summe der Exponenten ist immer 5.)

3) Bestimmen Sie kombinatorisch die Summe aller 4-stelligen Zahlen, die aus den Ziffern 1, 3, 5 und 7 gebildet werden können. Dabei sollen in jeder Zahl alle 4 Ziffern vorkommen.

4) Auf wie viele Arten kann man 8 verschiedene Bücher auf 3 Schüler verteilen, wenn Kim 2 Bücher und Tim und Jim je 3 Bücher erhalten sollen? (Tipp: Denken Sie sich die Bücher von 1 bis 8 nummeriert und den Schülern passend zugeordnet.)

5) Wie viele Zahlen zwischen 1.000 und 9.999 haben keine Ziffer mehrfach?

Grundaufgaben der Kombinatorik

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck heißen ***Binomialkoeffizienten***. Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ steht für die Zahl an der Stelle Nummer *k* in der Zeile Nummer *n*, wobei die Zählung jeweils mit 0 beginnt; und man sagt dazu ***„n über k“*** oder ***„k aus n“***.

Die Bildungsregel des Pascalschen Dreiecks, wonach die Summe zweier benachbarter Zahlen in einer Zeile die Zahl mittig unterhalb der beiden ergibt, kann mit dem Binomialkoeffizienten wie nebenstehend formuliert werden.

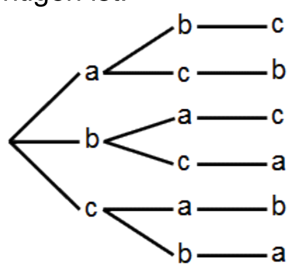
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Es lässt sich zeigen, dass $\binom{n}{k}$ die Anzahl aller möglichen k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge ist. Z.B. gibt es von der 4er-Menge {a,b,c,d} genau $\binom{4}{2}$ also 6 Mengen mit je 2 Elementen: {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}. Deshalb kann der Binomialkoeffizient auch wie folgt berechnet werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{Bsp.: } \binom{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{1} = \frac{7!}{3! \cdot 4!}$$

In der Kombinatorik entsprechen den k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge die ***Kombinationen ohne Wiederholungen****.* Bei Kombinationen bleibt die Reihenfolge der Elemente unberücksichtigt – wie bei Mengen. Ein Beispiel dafür ist das Lotto „6 aus 49“: Es werden nacheinander 6 Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 49 verschiedenen Kugeln gezogen. Die Reihenfolge bleibt aber unberücksichtigt. Dafür gibt es „6 aus 49“ mögliche Kombinationen.

Es gibt zwei wichtige Modelle der Kombinatorik, bei denen die Reihenfolge zu berücksichtigen ist:



▶ Als ***Permutationen*** einer Menge bezeichnet man die verschiedenen linearen Reihenfolgen, in denen die Elemente angeordnet werden können. Für eine 3-elementige Menge {a,b,c} gibt es z.B. 6 mögliche Anordnungen: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Hat die Menge *n* Elemente, dann ist die Anzahl:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

▶ Unter den ***Variationen mit Wiederholungen*** der Länge k aus einer Menge mit n Elementen, versteht man alle möglichen linearen Anordnungen mit genau k Gliedern, die aus der Menge mit n Elementen kommen und sich wiederholen können. Z.B. gibt es 8 Variationen der Länge 3 aus der Menge {0,1}: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. I.Allg. ist die Anzahl: n^k

Von diesen Modellen der Kombinatorik lassen sich weitere Ableiten:

▶ ***Kombinationen mit Wiederholungen***: Aus einer Menge mit n Elementen werden Sequenzen gebildet, die k Glieder lang sind. Dabei können sich Glieder wiederholen, aber auf ihre Reihenfolge kommt es nicht an. Dann ist die Anzahl der Kombinationen: $\binom{n+k-1}{k}$

▶ ***Permutationen mit Wiederholungen***: Aus einer Menge mit den Elementen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ wird eine Sequenzen gebildet. Die Vielfachheit, mit der das Element m_1 darin stets vorkommt seit k_1, und allgemein sei k_t die Vielfachheit von m_t. Dann ist die Anzahl der unterschiedlichen Anordnungen dieser Sequenz:

$$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

▶ ***Variationen ohne Wiederholungen***: Aus einer Menge mit n Elementen werden Sequenzen gebildet, die k Glieder lang sind. Jedes Glied kommt nur einmal vor. Damit ist insbesondere $k \leqslant n$. Die Anzahl dieser Sequenzen ist: $\frac{n!}{(n-k)!}$ oder $\binom{n}{k} \cdot k!$