Michael Johann

- Keine Abgabe -

5. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2017)

<u>Definition:</u> Die *Potenzmenge* P(M) einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, also P(M) = $\{ X \mid X \subseteq M \}$.
<u>Bsp.:</u> Für M={ 1, 2, 3} ist P(M) = { { }, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3} }

1) Die Potenzmenge von {a,b,c} hat doppelt so viele Elemente wie die Potenzmenge von {a,b}: $|P(\{a,b,c\})| = 2\cdot|P(\{a,b\})|$. Denn $P(\{a,b,c\})$ lässt sich wie folgt in zwei gleich große, disjunkte* Teilmengen zerlegen, wovon die eine $P(\{a,b\})$ ist:
$P(\{a,b,c\}) = \{\{\},\{a\},\{b\},\{a,b\}\} \cup \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$
(*) disjunkt: die Mengen haben keinerlei gemeinsame Elemente
   a) Zeigen Sie in gleicher Weise, dass die Potenzmenge von {a,b,c,d} doppelt so viele Elemente hat wie die Potenzmenge von {a,b,c}: $|P(\{a,b,c,d\})| = 2\cdot|P(\{a,b,c\})|$.
   Tipp: Notieren Sie die beiden disjunkten Teilmengen von P({a,b,c,d}), und beachten Sie, dass es eine besonders nahe liegende Bijektion zwischen ihnen gibt.
   b) Allgemein gilt:
   Ist M eine endliche Menge und m ein Element darin, dann hat die Potenzmenge von M doppelt so viele Elemente wie die Potenzmenge von M ohne m: $|P(M)| = 2\cdot|P(M\setminus\{m\})|$.
   Vervollständigen Sie den folgenden Beweis dieser Aussage:
   Wir zerlegen $P(M)$ in die folgenden beiden Teilmengen:
   - $P(M\setminus\{m\}) = \{T \subseteq M \mid ....\}$ (Teilmengen von M, in denen m nicht vorkommt.)
   - $B = \{T \subseteq M \mid ....\}$ (Teilmengen von M, in denen ....)

   Wegen $P(M) = P(M\setminus\{m\}) \cup B$ und $P(M\setminus\{m\}) \cap B = \emptyset$ ist $|P(M)| =$ ....
   Da weiterhin $f(X) = X \cup \{m\}$ eine bijektive Abbildung von .... nach .... ist, gilt $|P(M\setminus\{m\})| = |.......|$. Deshalb hat $P(M)$ doppelt so viele Elemente wie jede der beiden Mengen, und es ist $|P(M)| = 2\cdot|P(M\setminus\{m\})|$.

2) Es sei f eine Abbildung von M={1,2,3} in P(M), die wie folgt definiert ist:
f(1)={ }, f(2)={1,2}, f(3)={2}.
Welche Elemente gehören dann konkret zur Menge $\{m\in M \mid m\notin f(m)\}$?
(Also welche Elemente aus M sind nicht in der Teilmenge enthalten, auf die sie abgebildet werden?)
Überlegen Sie sich zwei weitere Abbildungen von M in P(M) und bestimmen Sie jeweils die zugehörige Menge $\{m\in M \mid m\notin f(m)\}$.
Egal, welche Abbildung Sie wählen: Es gibt nie ein Element aus M, das auf die Menge $\{m\in M \mid m\notin f(m)\}$ abgebildet wird.

3) Setzen Sie in die Lücken passende Ausdrücke oder Symbole ein:
Ist M eine unendliche Menge, dann existiert keine .... Abbildung $f: M \to P(M)$ (s. Satz von Cantor).
Beweis: Zu einer Abbildung $f: M \to P(M)$ betrachten wir folgende Teilmenge A von M:
- $A = \{m\in M \mid m \text{ ...... } f(m)\} \subseteq M$
  (Elemente, die nicht in der Teilmenge enthalten sind, auf die sie abgebildet werden)

Angenommen, es gäbe ein a in M, das auf diese Menge A abgebildet wird: $f(a)\,......\,A$.
Dann stellt sich die Frage, ob a in A enthalten ist oder nicht.

- Ist $a \in A$, dann gilt nach der Definition der Menge A: $a\,......\,f(a)$. Aber weil $f(a)\,......\,A$ ist, ist das widersprüchlich.
- Ist hingegen $a \notin A$, dann gilt wegen $f(a)\,......\,A$ auch $a\,......\,f(a)$. Damit erfüllt a jedoch die Definitionsbedingung der Menge A und ist darin enthalten, was ebenfalls widersprüchlich ist.

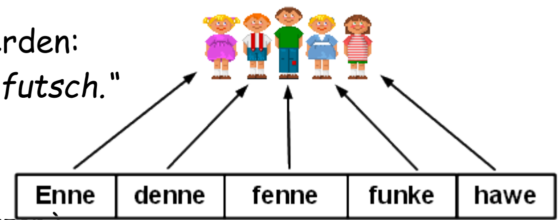
Deshalb kann es ein solches Element a, das auf A abgebildet wird, nicht geben, und f ist somit nicht ……………………… .

4) Mit der gleichen Idee wie beim 2. Cantorschen Diagonalverfahren lässt sich zeigen, dass die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen (die Potenzmenge P(ℕ)) nicht abzählbar ist.
Bsp.: Beginnt eine Liste von Teilmengen mit: A={3,5,7,...}, B={1,4,6,8,...}, C={1,2,4,7,10,...}, D={2,4,5,8,11,...} etc., dann notiert man die einzelnen Mengen in einer Tabelle mit der Überschrift ℕ als Folgen z.B. von Häkchen („ist Element") und Strichen („ist nicht Element") :

ℕ:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	...
A:	–	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	...
B:	✓	–	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	–	...
C:	✓	✓	–	✓	–	–	✓	–	–	✓	–	...
D:	–	✓	–	✓	✓	–	–	✓	–	–	✓	...
...	...	...	...	...	...							

Ermitteln Sie daraus so wie beim Cantorschen Verfahren die ersten Elemente einer Teilmenge, die nicht in der Liste vorkommt, und begründen Sie Ihr Vorgehen.

5) Der folgende Abzählreim soll zum Zählen verwendet werden:
„Enne, denne, fenne, funke, hawe, schnawe, niko, demo, futsch."



a) Überprüfen Sie die Erfüllbarkeit der Zählprinzipien.
(Nehmen Sie an, der Reim sei der Anfang der Zahlwortreihe aus einer fremden Sprache und ließe sich beliebig weit fortsetzen.)

b) Auf welcher Niveaustufe der Zählfähigkeit nach Fuson ordnen Sie sich hier selbst ein?

c) Setzen Sie in die Lücken passende Ausdrücke ein und vervollständigen Sie die Grafik:
Wenn der obige Abzählreim benutzt wird, um die Anzahl der Elemente von {A, B, C} zu bestimmen, dann wird zunächst ………………………………………. zwischen dieser Menge und einem Anfangsabschnitt des Reims hergestellt. Dieser Abschnitt ist somit als ………………… Anzahl der Elemente von {A, B, C} verwendbar.
Steht darüber hinaus das zuletzt genannte Reimwort als ……………………… für den ganzen Anfangsabschnitt, dann ist es als ………………… Anzahl der Elemente von {A, B, C} verwendbar.