Michael Johann

# 2. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2018)

1) Das Produkt $13 \cdot 17$ lässt sich berechnen, indem man das Produkt der beiden Nachbarzehner $(20 \cdot 10)$ und das Produkt der Einer $(3 \cdot 7)$ addiert: $13 \cdot 17 = 20 \cdot 10 + 3 \cdot 7$.

<u>Weitere Beispiele:</u>

$12 \cdot 18 = 20 \cdot 10 + 2 \cdot 8$
$14 \cdot 16 = 20 \cdot 10 + 4 \cdot 6$
$34 \cdot 36 = 40 \cdot 30 + 4 \cdot 6$
$63 \cdot 67 = 70 \cdot 60 + 3 \cdot 7$

➢ Verwenden Sie ein Rechteck aus $13 \cdot 17$ Kästchen (o.Ä.), um diesen Rechenweg zu begründen.
(Schneiden Sie – gedanklich – einen geeigneten Streifen davon ab, um ihn woanders wieder anzulegen.)

➢ Begründen Sie das Verfahren am Beispiel $34 \cdot 36$ durch eine konkrete Rechnung, die sich verallgemeinern lässt. Tipp: Schreiben Sie 34 als $3 \cdot 10 + 4$ und 36 als $3 \cdot 10 + (10 - 4)$.

➢ Versuchen Sie, den Rechentrick auf das Produkt $234 \cdot 236$ anzuwenden.

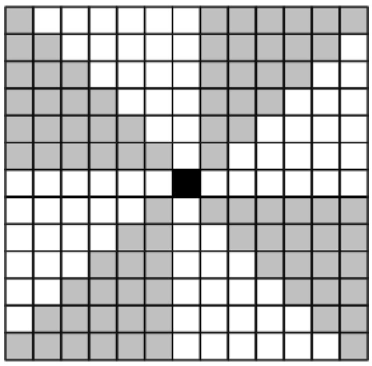
2a) Berechnen Sie nach obigem Verfahren $45^2$ und daraus mithilfe der binomischen Formeln $43^2$, $44^2$, $46^2$ und $47^2$.

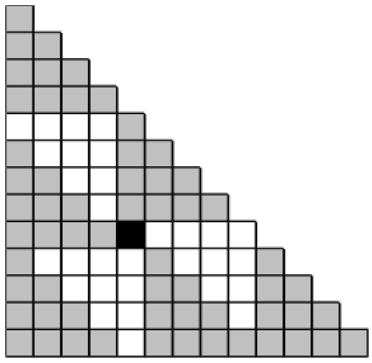
b) Zeigen Sie 10 Anwendungen des 3. binomischen Gesetzes im kleinen Einmaleins auf.

3) ➢ Notieren Sie die ersten 10 Dreieckszahlen $\Delta_1$, $\Delta_2$, …, $\Delta_{10}$ ($\Delta_n = 1+2+...+n$), und zeigen Sie, wie man daraus die ersten 10 Quadratzahlen berechnen kann.

➢ Drücken Sie die Summe $1+2+...+99+100+99+...+2+1$ mithilfe des Symbols $\Delta_n$ für Dreieckszahlen aus (2 Möglichkeiten) und geben Sie den Wert der Summe an.

4a) Aus der linken Zeichnungen kann man entnehmen: $13^2 = 8 \cdot (1+2+...+6) + 1$, und aus der rechten: $\Delta_{13} = 9 \cdot (1+2+3+4) + 1$.





➢ Was ist die nächst größere/kleinere Quadrat- bzw. Dreieckszahl, die sich entsprechend berechnen lässt?

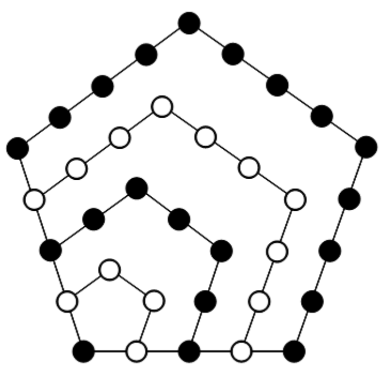
b) Die Zahl 1 ist sowohl Quadratzahl ($=1^2$) als auch Dreieckszahl ($= \Delta_1$).

➢ Verwenden Sie die folgende Gleichung, um ausgehend von $\Delta_1$ die nächsten 3 Dreieckszahlen zu bestimmen, die auch Quadratzahlen sind: $\Delta_{8\Delta_n} = 4\Delta_n \cdot (2n+1)^2$

➢ Wenn man mit $\Delta_2 = 3$ beginnt, erhält man mit obiger Gleichung zwar eine Dreieckszahl, diese ist aber keine Quadratzahl. Begründen Sie!

➢ Finden Sie eine weitere Dreieckszahl, die auch Quadratzahl ist, aber in der obigen Folge nicht vorkommt.

5) Pentagonalzahlen erhält man analog zur Folge der Quadratzahlen durch sukzessives Anfügen von Winkelhagen derart, dass immer größere Fünfeckmuster entstehen. Ist $H_n$ die $n$-te Pentagonalzahl ($P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, ...), dann gilt: $P_n = n + 3\Delta_{n-1}$



➢ Begründen Sie diese Formel an nebenstehendem Punktmuster.

➢ Wie lautet die entsprechende Formel für 7-Ecke ($S_n = ...$)? Berechnen Sie die fünfte 7-Eckzahl.

6a) Eine natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe all ihrer Teiler ist außer ihr selbst. Beispiele sind 6 = 1 + 2 + 3 oder 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

> *Ist $p = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$ eine Primzahl, dann ist $p \cdot 2^n$ eine vollkommene Zahl.*
> (Euklid: Elemente, IX, 36)

➢ Zeigen Sie, dass $64 \cdot (1+2+4+8+16+32+64)$ eine vollkommene Zahl ist.
Gehen Sie dabei so vor, dass der allgemeine Beweis erkennbar ist (s. Vorlesung bzw. „Aufgaben mit Lösungen – 2“).

b) Zeigen Sie: Die obige, vollkommene Zahl $64 \cdot (1+2+4+8+16+32+64)$ ist eine Dreieckszahl.
Gehen Sie auch hier wie im allgemeinen Beweis vor.

7) Berechnen Sie die Summen:

a) $175 + 188 + 201 + \ldots + 383$ b) $1/7 + 1/7^2 + 1/7^3 + 1/7^4 + \ldots$