Michael Johann

4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2018)

1a) Begründen Sie, weshalb folgende Strukturen keine Modelle der Dedekind-Peano-Axiome sind:

i) $2^0 \to 2^{-1} \to 2^{-2} \to \ldots\ 0 \to -1 \to -2, \ldots$

ii) $\ldots \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$

iii) $$\begin{tikzcd} & & c \arrow[d] \\ a \arrow[r] & b \arrow[ur] & \\ & & d \arrow[ul] \end{tikzcd}$$ (d.h. $a \to b \to c \to d \to b$)

($x \to y$ steht für: y ist Nachfolger von x)

b) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome an der Folge der Fibonacci-Zahlen: $1 \to 2 \to 3\ (=1+2) \to 5\ (=2+3) \to 8\ (=3+5) \to \ldots$

2) Durch die folgenden Wertetabellen findet eine Zuordnung von Elementen einer Menge A zu Elementen einer Menge B statt. Notieren Sie in der Tabelle darunter, welche Eigenschaften diese Zuordnungen jeweils haben.

①

A:	x	y	
B:	0	0	1

(A= {x,y}, B={0,1})

②

A:	x		y
B:	0	1	

(A={x,y}, B={0,1})

③

A:	x	x	y	
B:	0	1	1	2

(A={x,y}, B={0,1,2})

④

A:	x	y	
B:	0	1	2

(A={x,y}, B={0,1,2})

⑤

A:	x	y	z
B:	0	0	0

(A={x,y,z}, B={0})

⑥

A:	x	y	z
B:	0	1	2

(A={x,y,z}, B={0,1,2})

⑦

A:	x
B:	0

(A={x}, B={0})

⑧

A:	
B:	

(A={ }, B={ })

⑨

A:	
B:	0

(A={ }, B={0})

⑩

A:	x
B:	

(A={x}, B={ })

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
Zuordnung										
Abbildung										
injektiv										
surjektiv										
bijektiv										

3) Die Anzahl der Elemente einer Menge A sei n, die der Menge B sei m ($n, m \in \mathbb{N}$). Wie viele Abbildungen gibt es von A nach B? (Begründen Sie kombinatorisch.)

4) Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung gibt
  a) von $\mathbb{Z}$ nach {1, 3, 5, 7, 9 ...} (ungerade Zahlen),
  b) von den geraden ganzen Zahlen {... -4, -2, 0, 2, 4, ...} in die Menge der Brüche n/m mit $n, m \in \mathbb{N}$. (Unter Verwendung des 1. Cantorschen Diagonalverfahrens.)
  (Skizzieren der Beweisidee genügt!)

5) Die *Potenzmenge* P(M) einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, also $P(M) = \{ X \mid X \subseteq M \}$. Bsp.: Für M={1,2,3} ist P(M) = { { }, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2, 3} }

- Zerlegen Sie die Potenzmenge von M={O, ◊, Δ, #} in zwei disjunkte Teilmengen, wovon eine die Potenzmenge von M\{#} ist.
- Wie sieht man leicht, dass die beiden Teilmengen gleich viele Elemente haben?

6a) Geben Sie für M={1} die beiden möglichen Abbildungen f_1, f_2 von M nach P(M) an, und bestimmen Sie die zugehörigen Mengen $F_1 = \{ m \in M \mid m \notin f_1(m) \}$ sowie $F_2 = \{ m \in M \mid m \notin f_2(m) \}$.

b) Geben Sie für M={1,2} alle möglichen Abbildungen f_i von M nach P(M) an, und bestimmen Sie auch hier jeweils die zugehörigen Mengen $F_i = \{ m \in M \mid m \notin f_i(m) \}$.

c) Wann liegt in a) und b) F_i im Bild von f_i? (d.h. $F_i \in f_i(M)$ oder $F_i \in \mathrm{Bild}(f_i)$).