

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2019)

- 1) Das Produkt $13 \cdot 17$ lässt sich berechnen, indem man das Produkt der beiden Nachbarzehner ($20 \cdot 10$) und das Produkt der Einer ($3 \cdot 7$) addiert: $13 \cdot 17 = 20 \cdot 10 + 3 \cdot 7$.

Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} 12 \cdot 18 &= 20 \cdot 10 + 2 \cdot 8 \\ 14 \cdot 16 &= 20 \cdot 10 + 4 \cdot 6 \\ 34 \cdot 36 &= 40 \cdot 30 + 4 \cdot 6 \\ 63 \cdot 67 &= 70 \cdot 60 + 3 \cdot 7 \end{aligned}$$

- Verwenden Sie ein Rechteck aus $13 \cdot 17$ Kästchen (o.Ä.), um diesen Rechenweg zu begründen.
(Schneiden Sie - gedanklich - einen geeigneten Streifen davon ab, um ihn woanders wieder anzulegen.)
- Begründen Sie das Verfahren am Beispiel $34 \cdot 36$ durch eine konkrete Rechnung, die sich verallgemeinern lässt. Tipp: Schreiben Sie 34 als $3 \cdot 10 + 4$ und 36 als $3 \cdot 10 + (10 - 4)$.
- Versuchen Sie, den Rechentrick auf das Produkt $234 \cdot 236$ anzuwenden.

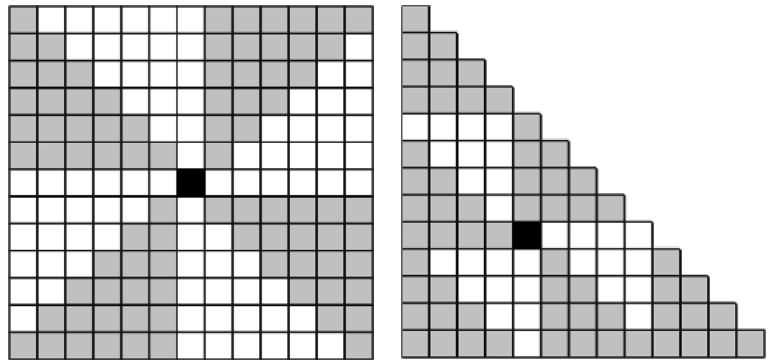
- 2a) Berechnen Sie nach obigem Verfahren 45^2 und daraus mithilfe der binomischen Formeln 43^2 , 44^2 , 46^2 und 47^2 .

- b) Zeigen Sie 10 Anwendungen des 3. binomischen Gesetzes im kleinen Einmaleins auf.

- 3) ➤ Notieren Sie die ersten 10 Dreieckszahlen $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{10}$ ($\Delta_n = 1+2+\dots+n$), und zeigen Sie, wie man daraus die ersten 10 Quadratzahlen berechnen kann.

- Drücken Sie die Summe $1+2+\dots+99+100+99+\dots+2+1$ mithilfe des Symbols Δ_n für Dreieckszahlen aus (2 Möglichkeiten) und geben Sie den Wert der Summe an.

- 4a) Aus der linken Zeichnung kann man entnehmen: $13^2 = 8 \cdot (1+2+\dots+6) + 1$, und aus der rechten: $\Delta_{13} = 9 \cdot (1+2+3+4) + 1$.



- Was ist die nächst größere/kleinere Quadrat- bzw. Dreieckszahl, die sich entsprechend berechnen lässt?

- b) Die Zahl 1 ist sowohl Quadratzahl ($=1^2$) als auch Dreieckszahl ($=\Delta_1$).

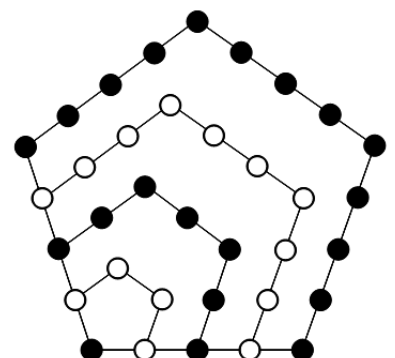
- Verwenden Sie die folgende Gleichung, um ausgehend von Δ_1 die nächsten 3

Dreieckszahlen zu bestimmen, die auch Quadratzahlen sind: $\Delta_{8\Delta_n} = 4\Delta_n \cdot (2n+1)^2$

- Wenn man mit $\Delta_2 = 3$ beginnt, erhält man mit obiger Gleichung zwar eine Dreieckszahl, diese ist aber keine Quadratzahl. Begründen Sie!

- Finden Sie eine weitere Dreieckszahl, die auch Quadratzahl ist, aber in der obigen Folge nicht vorkommt.

- 5) Pentagonalzahlen erhält man analog zur Folge der Quadratzahlen durch sukzessives Anfügen von Winkelhagen derart, dass immer größere Fünfeckmuster entstehen. Ist H_n die n -te Pentagonalzahl ($P_1 = 1, P_2 = 5, P_3 = 12, \dots$), dann gilt: $P_n = n + 3\Delta_{n-1}$



- Begründen Sie diese Formel an nebenstehendem Punktmuster.

- Wie lautet die entsprechende Formel für 7-Ecke ($S_n = \dots$)?

Berechnen Sie die fünfte 7-Eckzahl.

6a) Eine natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe all ihrer Teiler ist außer ihr selbst. Beispiele sind $6 = 1 + 2 + 3$ oder $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Ist $p = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$ eine Primzahl, dann ist $p \cdot 2^n$ eine vollkommene Zahl.
(Euklid: Elemente, IX, 36)

➤ Zeigen Sie, dass $64 \cdot (1+2+4+8+16+32+64)$ eine vollkommene Zahl ist. Gehen Sie dabei so vor, dass der allgemeine Beweis erkennbar ist (s. Vorlesung bzw. „Aufgaben mit Lösungen - 2“).

b) Zeigen Sie: Die obige, vollkommene Zahl $64 \cdot (1+2+4+8+16+32+64)$ ist eine Dreieckszahl. Gehen Sie auch hier wie im allgemeinen Beweis vor.

7) Berechnen Sie die Summen:

a) $175 + 188 + 201 + \dots + 383$

b) $1/7 + 1/7^2 + 1/7^3 + 1/7^4 + \dots$