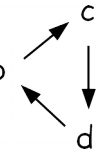


4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2019)

1a) Begründen Sie, weshalb folgende Strukturen keine Modelle der Dedekind-Peano-Axiome sind:

- i) $2^0 \rightarrow 2^{-1} \rightarrow 2^{-2} \rightarrow \dots \quad 0 \rightarrow -1 \rightarrow -2, \dots$ iii) $a \rightarrow b$  (d.h. $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow b$)
 ii) $\dots \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
 ($x \rightarrow y$ steht für: y ist Nachfolger von x)

b) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome an der Folge der Fibonacci-Zahlen: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 (=1+2) \rightarrow 5 (=2+3) \rightarrow 8 (=3+5) \rightarrow \dots$

2) Durch die folgenden Wertetabellen findet eine Zuordnung von Elementen einer Menge A zu Elementen einer Menge B statt. Notieren Sie in der Tabelle darunter, welche Eigenschaften diese Zuordnungen jeweils haben.

- ① $A: x \mid y \mid _ \quad B: 0 \mid 0 \mid 1$ ② $A: x \mid _ \mid y \quad B: 0 \mid 1 \mid _$ ③ $A: x \mid x \mid y \mid _ \quad B: 0 \mid 1 \mid 1 \mid 2$ ④ $A: x \mid y \mid _ \quad B: 0 \mid 1 \mid 2$
 ($A=\{x,y\}, B=\{0,1\}$) ($A=\{x,y\}, B=\{0,1\}$) ($A=\{x,y\}, B=\{0,1,2\}$) ($A=\{x,y\}, B=\{0,1,2\}$)
- ⑤ $A: x \mid y \mid z \quad B: 0 \mid 0 \mid 0$ ⑥ $A: x \mid y \mid z \quad B: 0 \mid 1 \mid 2$ ⑦ $A: x \quad B: 0$ ⑧ $A: _ \quad B: _$ ⑨ $A: _ \quad B: 0$
 ($A=\{x,y,z\}, B=\{0\}$) ($A=\{x,y,z\}, B=\{0,1,2\}$) ($A=\{x\}, B=\{0\}$) ($A=\{ \}, B=\{ \}$) ($A=\{ \}, B=\{0\}$)

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
Zuordnung										
Abbildung										
injektiv										
surjektiv										
bijektiv										

- ⑩ $A: x \quad B: _$
 ($A=\{x\}, B=\{ \}$)

3) Die Anzahl der Elemente einer Menge A sei n , die der Menge B sei m ($n, m \in \mathbb{N}$).
 Wie viele Abbildungen gibt es von A nach B ? (Begründen Sie kombinatorisch.)

4) Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung gibt

- a) von \mathbb{Z} nach $\{1, 3, 5, 7, 9 \dots\}$ (ungerade Zahlen),
 b) von den geraden ganzen Zahlen $\{\dots -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ in die Menge der Brüche n/m mit $n, m \in \mathbb{N}$. (Unter Verwendung des 1. Cantorschen Diagonalverfahrens.)
 (Skizzieren der Beweisidee genügt!)

5) Die Potenzmenge $P(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M , also $P(M) = \{ X \mid X \subseteq M \}$. Bsp.: Für $M=\{1,2,3\}$ ist $P(M) = \{ \{ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2, 3\} \}$
 ➤ Zerlegen Sie die Potenzmenge von $M=\{O, \diamond, \Delta, \#\}$ in zwei disjunkte Teilmengen, wovon eine die Potenzmenge von $M \setminus \{\#\}$ ist.
 ➤ Wie sieht man leicht, dass die beiden Teilmengen gleich viele Elemente haben?

- 6a) Geben Sie für $M=\{1\}$ die beiden möglichen Abbildungen f_1, f_2 von M nach $P(M)$ an, und bestimmen Sie die zugehörigen Mengen $F_1 = \{ m \in M \mid m \notin f_1(m) \}$ sowie $F_2 = \{ m \in M \mid m \notin f_2(m) \}$.
 b) Geben Sie für $M=\{1,2\}$ alle möglichen Abbildungen f_i von M nach $P(M)$ an, und bestimmen Sie auch hier jeweils die zugehörigen Mengen $F_i = \{ m \in M \mid m \notin f_i(m) \}$.
 c) Wann liegt in a) und b) F_i im Bild von f_i ? (d.h. $F_i \in f_i(M)$ oder $F_i \in \text{Bild}(f_i)$).