3. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik

(Kap. II.1.c, Video 006)

Abgabe bis Mo., 11.05., 12 Uhr an: `uebung.arithmetik@schulabakus.de`, **Betreff: [2b] #2**

1) Fasst man Zahlen im Pascal'schen Dreieck so zusammen, dass die Kontur an einen Eishockeyschläger erinnert, wie in nebenstehendem Bild, dann ist die Zahl in der Kelle (35) die Summe der Zahlen im Schaft (1+3+6+10+15). Dabei kommt es nicht darauf an, wo der Eishockeyschläger liegt und wie lang er ist. Wichtig ist nur, dass der Schaft bis zu einer Außenseite des Dreiecks reicht und parallel zur anderen Außenseite ist; außerdem muss die Kelle nach unten gerichtet sein und darf nur eine Zahl beinhalten.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

➢ Notieren Sie das obige Beispiel (1+3+6+10+15=35) mithilfe des Binomialkoeffizienten:

$$\binom{2}{2}+\binom{\dots}{\dots}+\binom{\dots}{\dots}+\binom{\dots}{\dots}+\binom{\dots}{\dots}=\binom{\dots}{\dots}$$

➢ Notieren Sie diese „Eishockeyschläger-Regel" allgemein unter Verwendung von Variablen und mithilfe des Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{n}+\binom{\dots}{\dots}+\binom{\dots}{\dots}+\dots+\binom{\dots}{\dots}=\binom{\dots}{\dots}$ bzw. $\sum_{i=\dots}^{\dots}\binom{\dots}{\dots}=\binom{\dots}{\dots}$

➢ Beweisen Sie die Regel durch vollständige Induktion (und unter Verwendung des Binomialkoeffizienten).

2a) Es sei $s = 1 + a_1 + a_2 \dots a_{n-2} + a_{n-1} + 1$ die Summe der Zahlen einer Zeile im Pascalschen Dreieck. Zeigen Sie (ohne binom. Formeln), dass in der Zeile darunter die Summe der Zahlen doppelt so groß ist (=2s).
(Tipp: Siehe „Aufgaben mit Lösungen - 3")

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\
1 & \dots & a_1 & \dots & a_2 & \dots & \dots & a_{n-2} & \dots & a_{n-1} & \dots\ 1
\end{array}$$

b) Schreiben Sie die obige Summe mit Binomialkoeffizienten und ergänzen Sie den Exponenten:

$$s = 1 + a_1 + a_2 \dots a_{n-2} + a_{n-1} + 1 = \binom{\dots}{\dots}+\binom{\dots}{\dots}+\dots+\binom{\dots}{\dots}=\sum_{i=\dots}^{\dots}\binom{\dots}{\dots} = 2^{\dots}$$

3) Beim Ausmultiplizieren von $(a+b+c)^3$ erhält man eine Summe von Produkten der Form $n\cdot a^r b^s c^t$ (mit $r,s,t \in \{0,1,2,3\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $r+s+t=3$). Wie viele Summanden sind das? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich! (Tipp: Siehe „Aufgaben mit Lösungen - 3")

4a) Notieren Sie die binomischen Formel(n) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ mit Binomialkoeffizienten.

b) Wie lauten die allgemeinen binomischen Formeln für $(a + b)^n$ bzw. $(a - b)^n$?

c) Zeigen Sie mit der allgem. binomischen Formel, dass die Summe aller Zahlen einer Zeile des Pascalschen Dreiecks 2^n ist. (Tipp: a=b=1.)

d) Die Ziffern in Zeile 3 des Pascalschen Dreiecks ergeben zusammengefasst 121, was 11^2 ist; die in Zeile 4 ergeben 1331, was 11^3 ist. Erklären Sie diese Phänomen, und zeigen Sie, dass es nicht für alle Zeilen gilt.

5a) Berechnen Sie $\binom{1000}{999}$ und allgemein $\binom{n}{n-1}$.

b) Lösen Sie die Gleichung algebraisch nach n auf: $\binom{n}{4} = 6\cdot\binom{n}{2}$.

Grundaufgaben der Kombinatorik

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck heißen ***Binomialkoeffizienten***. Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ steht für die Zahl an der Stelle Nummer *k* in der Zeile Nummer *n*, wobei die Zählung jeweils mit 0 beginnt; und man sagt dazu ***„n über k“*** oder ***„k aus n“***.

Die Bildungsregel des Pascalschen Dreiecks, wonach die Summe zweier benachbarter Zahlen in einer Zeile die Zahl mittig unterhalb der beiden ergibt, kann mit dem Binomialkoeffizienten wie nebenstehend formuliert werden.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

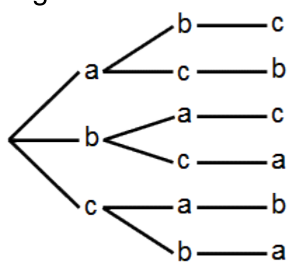
Es lässt sich zeigen, dass $\binom{n}{k}$ die Anzahl aller möglichen k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge ist. Z.B. gibt es von der 4er-Menge {a,b,c,d} genau $\binom{4}{2}$ also 6 Mengen mit je 2 Elementen:
{a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}. Deshalb kann der Binomialkoeffizient auch wie folgt berechnet werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad \text{Bsp.:} \quad \binom{7}{3} = \frac{7}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{1} = \frac{7!}{3!\cdot 4!}$$

In der Kombinatorik entsprechen den k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge die ***Kombinationen ohne Wiederholungen***. Bei Kombinationen bleibt die Reihenfolge der Elemente unberücksichtigt – wie bei Mengen. Ein Beispiel dafür ist das Lotto „6 aus 49“: Es werden nacheinander 6 Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 49 verschiedenen Kugeln gezogen. Die Reihenfolge bleibt aber unberücksichtigt. Dafür gibt es „6 aus 49“ mögliche Kombinationen.

Es gibt zwei wichtige Modelle der Kombinatorik, bei denen die Reihenfolge zu berücksichtigen ist:

▶ Als ***Permutationen*** einer Menge bezeichnet man die verschiedenen linearen Reihenfolgen, in denen die Elemente angeordnet werden können. Für eine 3-elementige Menge {a,b,c} gibt es z.B. 6 mögliche Anordnungen: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Hat die Menge *n* Elemente, dann ist die Anzahl:



$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$$

▶ Unter den ***Variationen mit Wiederholungen*** der Länge k aus einer Menge mit n Elementen, versteht man alle möglichen linearen Anordnungen mit genau k Gliedern, die aus der Menge mit n Elementen kommen und sich wiederholen können. Z.B. gibt es 8 Variationen der Länge 3 aus der Menge {0,1}: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. I.Allg. ist die Anzahl: n^k

Von diesen Modellen der Kombinatorik lassen sich weitere Ableiten:

▶ ***Kombinationen mit Wiederholungen***: Aus einer Menge mit n Elementen werden Sequenzen gebildet, die k Glieder lang sind. Dabei können sich Glieder wiederholen, aber auf ihre Reihenfolge kommt es nicht an. Dann ist die Anzahl der Kombinationen: $\binom{n+k-1}{k}$

▶ ***Permutationen mit Wiederholungen***: Aus einer Menge mit den Elementen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ wird eine Sequenzen gebildet. Die Vielfachheit, mit der das Element m_1 darin stets vorkommt seit k_1, und allgemein sei k_t die Vielfachheit von m_t. Dann ist die Anzahl der unterschiedlichen Anordnungen dieser Sequenz:

$$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$$

▶ ***Variationen ohne Wiederholungen***: Aus einer Menge mit n Elementen werden Sequenzen gebildet, die k Glieder lang sind. Jedes Glied kommt nur einmal vor. Damit ist insbesondere $k \leqslant n$. Die Anzahl dieser Sequenzen ist: $\frac{n!}{(n-k)!}$ oder $\binom{n}{k}\cdot k!$