4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik

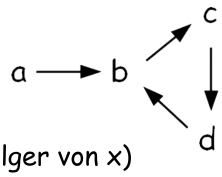
(Kap. II.1.d, e & II.2.a, …,e; Video 007, 007+, 008)

Abgabe bis Mo., 10.05., 24 Uhr an: `uebung.arithmetik@schulabakus.de`**, Betreff: #4**

1a) Begründen Sie, weshalb folgende Strukturen keine Modelle der Dedekind-Peano-Axiome sind:

i) 1 → 2 → 3 → …, -1 → -2 → -3 → …

ii) … → -4 → -3 → -2 → -1

iii) 

(d.h. a → b → c → d → b)

(x → y steht für: y ist Nachfolger von x)

b) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome an der Folge der negativen ganzen Zahlen: -1 → -2 → -3 → …

2) Durch die folgenden Wertetabellen findet eine Zuordnung von Elementen einer Menge A zu Elementen einer Menge B statt. Notieren Sie in der Tabelle darunter, welche Eigenschaften diese Zuordnungen jeweils haben.

① A: x | y | y |
B: 0 | 0 | 1 | 2
(A={x,y}, B={0,1,2})

② A: x | y |
B: 1 | 0 | 2
(A={x,y}, B={0,1,2})

③ A: y
B: 1
(A={y}, B={1})

④ A: x | y | z
B: 1 | 2 | 0
(A={x,y,z}, B={0,1,2})

⑤ A: x | y |
B: 1 | 1 | 0
(A= {x,y}, B={0,1})

⑥ A: x | | y
B: | 0 | 1
(A={x,y}, B={0,1})

⑦ A: x | y | z
B: 1 | 1 | 1
(A={x,y,z}, B={1})

⑧ A: y
B:
(A={y}, B={ })

⑨ A:
B:
(A={ }, B={ })

⑩ A:
B: 0
(A={ }, B={0})

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
Abbildung										
injektiv										
surjektiv										
bijektiv										

3) Die Anzahl der Elemente einer Menge A sei n, die der Menge B sei m (n, m ∈ ℕ). Begründen Sie kombinatorisch, weshalb m^n die Anzahl der Abbildungen von A nach B ist.

4) Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung gibt

a) von ℤ nach {1, 3, 5, 7, 9 …} (ungerade Zahlen),

b) von den geraden ganzen Zahlen {… -4, -2, 0, 2, 4, …} in die Menge der Brüche n/m mit n, m ∈ ℕ. (Skizze des 1. Cantor'schen Diagonalverfahrens.)

5) Die *Potenzmenge* P(M) einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, also P(M) = { X | X ⊆ M }. Bsp.: Für M={1,2,3} ist P(M) = { { }, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2, 3} }

- Zerlegen Sie die Potenzmenge von M={O, ◊, Δ, #} vollständig in zwei (disjunkte) Teil mengen, von denen eine alle Teilmengen von M mit dem Zeichen # beinhaltet. (Die andere ist dann folglich die Potenzmenge von M\{#}.)
- Wie sieht man leicht, dass die beiden Teilmengen gleich viele Elemente haben?

6a) Geben Sie für M={1} die beiden möglichen Abbildungen f_1, f_2 von M nach P(M) an, und bestimmen Sie die zugehörigen Mengen $F_1 = \{ m \in M \mid m \notin f_1(m) \}$ sowie $F_2 = \{ m \in M \mid m \notin f_2(m) \}$.

b) Geben Sie für M={1,2} alle möglichen Abbildungen f_i von M nach P(M) an, und bestimmen Sie auch hier jeweils die zugehörigen Mengen $F_i = \{ m \in M \mid m \notin f_i(m) \}$.

c) Wann liegt in a) und b) F_i im Bild von f_i? (d.h. $F_i \in f_i(M)$ oder $F_i \in \mathrm{Bild}(f_i)$).