2. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik

Abgabe bis Di., 10.05., 16 Uhr, in den Übungen oder im Briefkasten Geb. I, Erdgeschoss.

1a) Das Produkt $12 \cdot 18$ lässt sich berechnen, indem man das Produkt der beiden Nachbarzehner $(20 \cdot 10)$ und das Produkt der Einer $(2 \cdot 8)$ addiert: $12 \cdot 18 = 20 \cdot 10 + 2 \cdot 8$.

Weitere Beispiele:

$13 \cdot 17$	=	$20 \cdot 10$	+	$3 \cdot 7$
$14 \cdot 16$	=	$20 \cdot 10$	+	$4 \cdot 6$
$34 \cdot 36$	=	$40 \cdot 30$	+	$4 \cdot 6$
$63 \cdot 67$	=	$70 \cdot 60$	+	$3 \cdot 7$

i) Verwenden Sie ein Rechteck aus $12 \cdot 18$ Kästchen (o.Ä.), um diesen Rechenweg zu begründen.
(Schneiden Sie – gedanklich – einen geeigneten Streifen davon ab, um ihn woanders wieder anzulegen.)

ii) Begründen Sie das Verfahren am Beispiel $24 \cdot 26$. Schreiben Sie 24 als $2 \cdot 10 + 4$ und 26 als $2 \cdot 10 + (10 - 4)$, und führen Sie dann eine Rechnung durch, die mit anderen Produkten dieser Art ebenso durchführbar ist.

iii) Versuchen Sie, den Rechentrick auf das Produkt $124 \cdot 126$ anzuwenden.

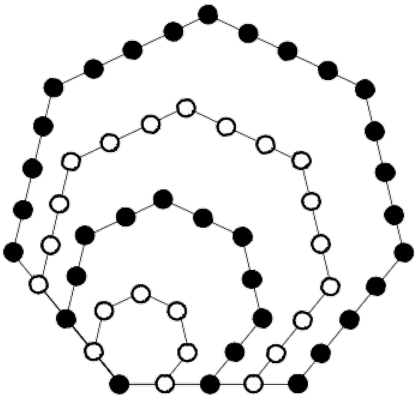
b) Berechnen Sie nach obigem Verfahren 35^2 und daraus mithilfe der binomischen Formeln 33^2, 34^2, 36^2 und 37^2.

c) Zeigen Sie 10 Anwendungen des 3. binomischen Gesetzes im kleinen Einmaleins auf.

2a) Notieren Sie die ersten 10 Dreieckszahlen Δ_1, Δ_2, …, Δ_{10} ($\Delta_n = 1+2+...+n$), und zeigen Sie, wie man daraus die ersten 10 Quadratzahlen berechnen kann.

b) Drücken Sie die Summe $1+2+...+9+10+9+...+2+1$ mithilfe des Symbols Δ_n für Dreieckszahlen auf zwei Arten aus, und geben Sie den Wert der Summe an.

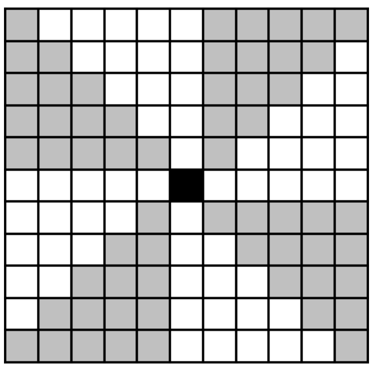
c) Septagonalzahlen erhält man analog zur Folge der Quadratzahlen durch sukzessives Anfügen von Winkelhaken derart, dass immer größere 7-Eckmuster entstehen. Ist S_n die n-te Septagonalzahl ($S_1 = 1$, $S_2 = 7$, $S_3 = 18$, …), dann gilt: $S_n = n + 5\Delta_{n-1}$

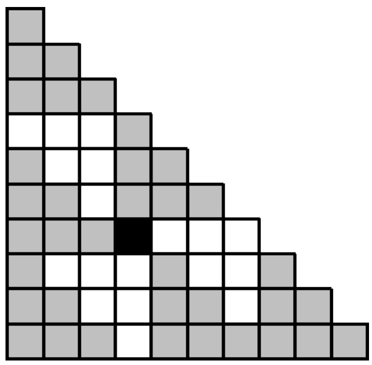


i) Begründen Sie diese Formel an nebenstehendem Punktmuster.

ii) Wie lautet die entsprechende Formel für 8-Ecke ($O_n = …$)?
Berechnen Sie die fünfte 8-Eck-Zahl (Oktagonalzahl).

3a) Aus der linken Zeichnungen kann man entnehmen: $11^2 = 8 \cdot \Delta_5 + 1$, und aus der rechten: $\Delta_{10} = 9 \cdot \Delta_3 + 1$.





- Was ist die nächst größere/kleinere Quadrat- bzw. Dreieckszahl, die sich entsprechend berechnen lässt?

b) Die Zahl 1 ist sowohl Quadratzahl ($= 1^2$) als auch Dreieckszahl ($1 = \Delta_1$).

Verwenden Sie die folgende Gleichung, um ausgehend von Δ_1 die nächsten 3 Dreieckszahlen zu bestimmen, die auch Quadratzahlen sind: $\Delta_{8\Delta_n} = 4\Delta_n \cdot (2n+1)^2$

- Wenn man mit $\Delta_2 = 3$ beginnt, erhält man mit obiger Gleichung zwar eine Dreieckszahl, diese ist aber keine Quadratzahl. Begründen Sie!
- Finden Sie eine weitere Dreieckszahl, die auch Quadratzahl ist, aber in der obigen Folge nicht vorkommt.

4a) Eine natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe all ihrer Teiler ist außer ihr selbst, z.B. $6 = 1 + 2 + 3$ oder $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Ist $p = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$ eine Primzahl, dann ist $p \cdot 2^n$ eine vollkommene Zahl.
(Euklid: Elemente, IX, 36)

- Zeigen Sie, dass $(2^{13} - 1) \cdot 2^{12}$, also $(1 + 2 + 4 + \ldots + 4096) \cdot 4096$, eine vollkommene Zahl ist. Dass $1 + 2 + 4 + \ldots + 4096$ (= 8191) eine Primzahl ist, dürfen Sie voraussetzen. Gehen Sie so vor, dass der allgemeine Beweis erkennbar ist (s. Vorlesung bzw. „Aufgaben mit Lösungen – 2").

b) Zeigen Sie: Die obige, vollkommene Zahl $(1 + 2 + 4 + \ldots + 4096) \cdot 4096$ ist eine Dreieckszahl. Gehen Sie auch hier wie im allgemeinen Beweis vor.

5) Berechnen Sie die Summen:

a) 137 + 140,5 + 144 + 147,5 + ... + 179
(immer 3,5 Abstand)

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \ldots$