4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik

Abgabe bis Di., 24.05., 16 Uhr, in den Übungen oder im Briefkasten Geb. I, Erdgeschoss.

1) Betrachten Sie folgende Strukturen ($x \rightarrow y$ steht für: y ist Nachfolger von x):

i) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \ldots,\ \aleph_0 \rightarrow \aleph_1 \rightarrow \aleph_2 \rightarrow \ldots$ (א: Aleph)

ii) $\ldots \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

iii) $1 \rightarrow \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{3} \rightarrow 2 \rightarrow \sqrt{2}$ bzw.
$$\begin{tikzcd} & & \sqrt{3} \arrow[d] \\ 1 \arrow[r] & \sqrt{2} \arrow[ur] & 2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

iv) $1 \rightarrow 11 \rightarrow 111 \rightarrow 1111 \ldots$ (Unärsystem)

Begründen Sie
a) mithilfe der Dedekind-Peano-Axiome
b) mithilfe wohlgeordneter Mengen,
weshalb i), ii) und iii) keine Modelle der natürlichen Zahlen sind und weshalb iv) ein Modell ist.

2) Die Anzahl der Elemente einer Menge A sei k, die der Menge B sei n ($n, k \in \mathbb{N}$).
Begründen Sie kombinatorisch, weshalb n^k die Anzahl der Abbildungen von A nach B ist.

3) Durch die folgenden Wertetabellen findet eine Zuordnung von Elementen einer Menge A zu Elementen einer Menge B statt. Notieren Sie in der Tabelle darunter, welche Eigenschaften diese Zuordnungen jeweils haben.

① A:
B: Ø
(A={ }, B={Ø})

② A: ♣ | ♦ |
B: Ø | Ø | ∞
(A={♣, ♦}, B={Ø, ∞})

③ A:
B:
(A={ }, B={ })

④ A: ♣ | ♦ | ♦
B: ∞ | Ø | π
(A={♣, ♦}, B={Ø, ∞, π})

⑤ A: ♦
B:
(A={♦}, B={ })

⑥ A: ♦
B: ∞
(A={♦}, B={∞})

⑦ A: ♣ | ♦ | ♠
B: ∞ | ∞ | ∞
(A={♣, ♦, ♠}, B={∞})

⑧ A: ♣ | ♦ | ♠
B: ∞ | π | Ø
(A={♣, ♦, ♠}, B={Ø, ∞, π})

⑨ A: ♣ | | ♦
B: | Ø | ∞
(A={♣, ♦}, B={Ø, ∞})

⑩ A: ♣ | ♦ | ♠
B: ∞ | ∞ | Ø
(A= {♣, ♦, ♠}, B={Ø, ∞})

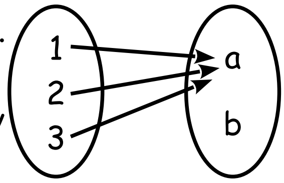
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
Abbildung										
injektiv										
surjektiv										
bijektiv										

4) Die *Potenzmenge* P(M) einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, also
$P(M) = \{ X \mid X \subseteq M \}$. Bsp.: Für $M=\{1,2,3\}$ ist $P(M) = \{ \{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$

- Zerlegen Sie die Potenzmenge von $M=\{w, x, y, z\}$ vollständig in zwei (disjunkte) Teil mengen, von denen eine alle Teilmengen von M mit z beinhaltet. (Die andere ist dann folglich die Potenzmenge von $M \setminus \{z\}$.)
- Wie sieht man leicht, dass die beiden Teilmengen gleich viele Elemente haben?

5) Ist f eine Abbildung von einer Menge A in eine Menge B. Dann ist für jede Teilmenge E von B die Menge $\{a \in A \mid f(a) \in E\}$ eine Teilmenge von A. In ihr liegen alle Elemente, deren Bild in E liegt; sie wird mit $f^{-1}(E)$ bezeichnet (f^{-1} heißt Urbildfunktion): $f^{-1}(E) := \{a \in A \mid f(a) \in E\}$.

Im Folgenden sei $f: \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ definiert durch $f(1) := a$, $f(2) := a$, $f(3) := a$.



a) Geben Sie für jede Teilmenge E von {a,b} die Menge $f^{-1}(E)$ an.

b) Zeigen Sie, dass $f^{-1}: P(B) \to P(A)$ zwar eine Abbildung aber weder injektiv noch surjektiv ist.

c) Definieren Sie selbst eine Abbildung $g: \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ so, dass g^{-1} nun aber injektiv ist. Welche Eigenschaft muss g dafür haben? Geben Sie auch hier $g^{-1}(E)$ für jedes $E \subseteq B$ an.

6a) Geben Sie für $M=\{0\}$ die beiden möglichen Abbildungen f_1, f_2 von M nach P(M) an, und bestimmen Sie die zugehörigen Mengen $F_1 = \{ m \in M \mid m \notin f_1(m) \}$ sowie $F_2 = \{ m \in M \mid m \notin f_2(m) \}$.

b) Geben Sie für $M=\{0; 1\}$ alle möglichen Abbildungen f_i von M nach P(M) an, und bestimmen Sie auch hier jeweils die zugehörigen Mengen $F_i = \{ m \in M \mid m \notin f_i(m) \}$.

c) Wann liegt in a) und b) F_i im Bild von f_i? (d.h. $F_i \in f_i(M)$ oder $F_i \in \mathrm{Bild}(f_i)$).