4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik

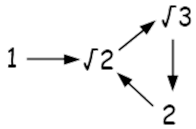
Abgabe bis Di., 23.05., 12 Uhr, in den Übungen oder im Briefkasten Geb. I, Erdgeschoss.

1) Betrachten Sie folgende Strukturen ($x \to y$ steht für: y ist Nachfolger von x):

i) $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \ldots$, $\aleph_0 \to \aleph_1 \to \aleph_2 \to \ldots$ (ℵ: Aleph)

ii) $\ldots \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$

iii) $1 \to \sqrt{2} \to \sqrt{3} \to 2 \to \sqrt{2}$ bzw.



iv) $1 \to 11 \to 111 \to 1111 \ldots$
(Unärsystem)

Begründen Sie

a) mithilfe der Dedekind-Peano-Axiome

b) mithilfe wohlgeordneter Mengen,

weshalb i), ii) und iii) keine Modelle der natürlichen Zahlen sind und weshalb iv) ein Modell ist.

2) Die Anzahl der Elemente einer Menge A sei k, die der Menge B sei n ($n, k \in \mathbb{N}$).
Begründen Sie kombinatorisch, weshalb n^k die Anzahl der Abbildungen von A nach B ist.

3) Durch die folgenden Wertetabellen findet eine Zuordnung von Elementen einer Menge A zu Elementen einer Menge B statt. Notieren Sie in der Tabelle darunter, welche Eigenschaften diese Zuordnungen jeweils haben.

①

A:	
B:	Ø

(A={ }, B={Ø})

②

A:	♣	♦	
B:	Ø	Ø	∞

(A={♣, ♦}, B={Ø,∞})

③

A:	
B:	

(A={ }, B={ })

④

A:	♣	♦	♦
B:	∞	Ø	π

(A={♣, ♦}, B={Ø, ∞, π})

⑤

A:	♦
B:	

(A={♦}, B={ })

⑥

A:	♦
B:	∞

(A={♦}, B={∞})

⑦

A:	♣	♦	♠
B:	∞	∞	∞

(A={♣, ♦, ♠}, B={∞})

⑧

A:	♣	♦	♠
B:	∞	π	Ø

(A={♣, ♦, ♠}, B={Ø, ∞, π})

⑨

A:	♣		♦
B:		Ø	∞

(A={♣, ♦}, B={Ø, ∞})

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
Abbildung										
injektiv										
surjektiv										
bijektiv										

⑩

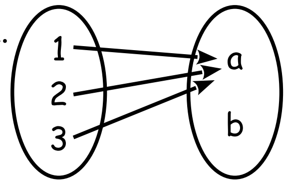
A:	♣	♦	♠
B:	∞	∞	Ø

(A= {♣, ♦, ♠}, B={Ø, ∞})

4) Bearbeiten Sie bitte Aufgabe 4 vom vorigen Aufgabenblatt (3).

5) Ist f eine Abbildung von einer Menge A in eine Menge B. Dann ist für jede Teilmenge E von B die Menge $\{a \in A \mid f(a) \in E\}$ eine Teilmenge von A. In ihr liegen alle Elemente, deren Bild in E liegt; sie wird mit $f^{-1}(E)$ bezeichnet (f^{-1} heißt Urbildfunktion): $f^{-1}(E) := \{a \in A \mid f(a) \in E\}$.

Im Folgenden sei $f: \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ definiert durch $f(1) := a$, $f(2) := a$, $f(3) := a$.



a) Geben Sie für jede Teilmenge E von {a,b} die Menge $f^{-1}(E)$ an.

b) Zeigen Sie, dass f^{-1} zwar eine Abbildung aber weder injektiv noch surjektiv ist.

c) Definieren Sie selbst eine Abbildung $g: \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ so, dass g^{-1} nun aber injektiv ist. Welche Eigenschaft muss g dafür haben? Geben Sie auch hier $g^{-1}(E)$ für jedes $E \subseteq B$ an.

<u>Vom vorigen Aufgabenblatt (3) die Aufgabe Nr. 4:</u>

Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $\leq$ eine antisymmetrische Ordnung, durch die alle Elemente in M vergleichbar sind. Jede Teilmenge $T \neq \emptyset$ von M habe eine größtes Element τ, d.h. $t \leq \tau$ für alle $t \in T$.

a) Nennen Sie Beispiele und Gegenbeispiele für solche Mengen, endliche und unendliche.

b) Zeigen Sie: Jede Teilmenge von M (und die Menge M selbst) hat genau ein größtes Element.
(Tipp: Nehmen Sie an, τ und σ seien größte Elemente einer Teilmenge T, und zeigen Sie, dass dann $\tau = \sigma$ ist.)

Wir nehmen zusätzlich an, dass es zu jedem $m \in M$ ein kleineres Element $n \in M$ gibt, $n < m$ (d.h. $n \leq m$ und $n \neq m$). Dann hat jedes $m \in M$ einen (direkten) *Vorgänger*, nämlich das größte Element in $S_m = \{s \in M \mid s < m\}$, also das größte aller kleineren Elemente.

c) Zeigen Sie: Das größte Element in M, wir bezeichnen es mit μ, ist kein Vorgänger eines anderen Elements.

d) Welche Zeilen der Tabelle ergeben in der richtigen Anordnung einen Beweis für die folgende Aussage? Notieren Sie die Buchstaben.
Die Vorgänger-Abbildung $V: M \mapsto M$, $V(m) = m^*$ (m^* ist der Vorgänger von m) ist injektiv.
(Gezeigt wird: Wenn $a, b \in M$ und $a \neq b$, dann $a^* \neq b^*$.)

A	Damit ist $a^* \neq b^*$.
B	$\{a, b\}$ hat nach Voraussetzung ein kleinstes Element. Wir nehmen an, es gelte $a < b$.
C	$\{a, b\}$ hat nach Voraussetzung ein größtes Element. Wir nehmen an, es gelte $a < b$.
D	Also ist b^* nicht das kleinste aller Elemente, die größer als a sind.
E	Sei $a, b \in M$ und $a \neq b$.
F	Dann ist $a < b < b^*$, so dass b und b^* größere Elemente sind als a.
G	Also ist a^* nicht das größte aller Elemente, die kleiner als b sind.
H	Dann ist $a^* < a < b$, so dass a und a^* kleinere Elemente sind als b.