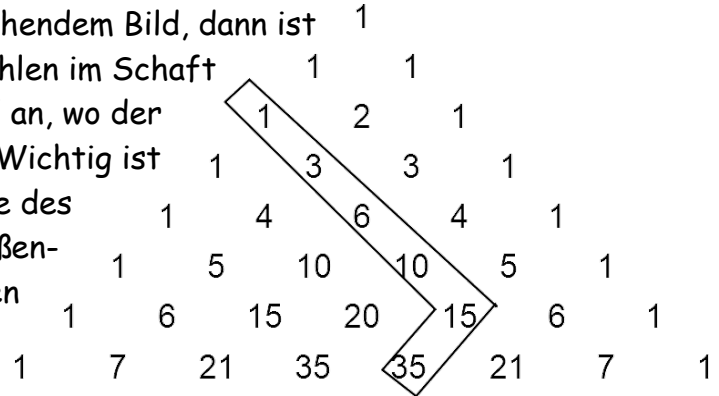


3. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik

Abgabe bis Mo., 04.05, 12 Uhr, in: Vorlesung / Briefkasten Geb. I, Erdgeschoss.

1) Fasst man Zahlen im Pascal'schen Dreieck so zusammen, dass die Kontur an einen Eishockeyschläger erinnert, wie in nebenstehendem Bild, dann ist die Zahl in der Kelle (35) die Summe der Zahlen im Schaft (1+3+6+10+15). Dabei kommt es nicht darauf an, wo der Eishockeyschläger liegt und wie lang er ist. Wichtig ist nur, dass der Schaft bis zu einer Außenseite des Dreiecks reicht und parallel zur anderen Außenseite ist; außerdem muss die Kelle nach unten gerichtet sein und darf nur eine Zahl beinhalten.



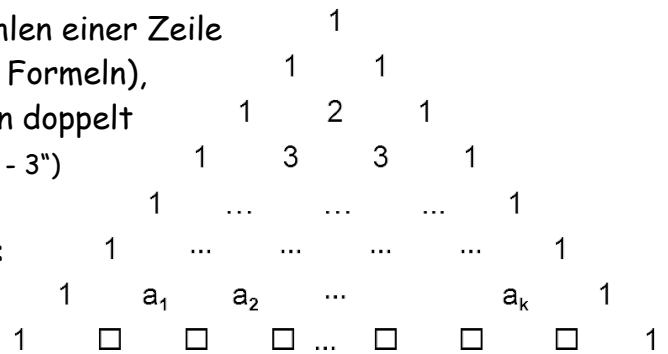
➤ Notieren Sie das obige Beispiel (1+3+6+10+15=35) mithilfe des Binomialkoeffizienten:

$$\binom{2}{0} + \binom{\dots}{\dots} + \binom{\dots}{\dots} + \binom{\dots}{\dots} + \binom{\dots}{\dots} = \binom{\dots}{\dots}$$

➤ Notieren Sie diese „Eishockeyschläger-Regel“ allgemein unter Verwendung von Variablen und mithilfe des Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{0} + \binom{\dots}{\dots} + \binom{\dots}{\dots} + \dots + \binom{\dots}{\dots} = \binom{\dots}{\dots}$ bzw. $\sum_{i=\dots}^{\dots} \binom{\dots}{\dots} = \binom{\dots}{\dots}$

➤ Beweisen Sie die Regel durch vollständige Induktion (und unter Verwendung des Binomialkoeffizienten).

2a) Es sei $s = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + 1$ die Summe der Zahlen einer Zeile im Pascalschen Dreieck. Zeigen Sie (ohne binom. Formeln), dass in der Zeile darunter die Summe der Zahlen doppelt so groß ist (=2s). (Tipp: Siehe „Aufgaben mit Lösungen - 3“)



b) Schreiben Sie die obige Summe mit Binomialkoeffizienten und ergänzen Sie den Exponenten:

$$s = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + 1$$

$$= \binom{\dots}{\dots} + \binom{\dots}{\dots} + \dots + \binom{\dots}{\dots} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \binom{\dots}{\dots} = 2 \dots$$

c) Berechnen Sie $\binom{100}{99}$ und allgemein $\binom{n}{n-1}$.

d) Lösen Sie die Gleichung algebraisch nach n auf: $\binom{n}{6} = 3 \cdot \binom{n}{4}$.

3a) Notieren Sie die binomischen Formel(n), $(\heartsuit \pm \spadesuit)^2 = \heartsuit^2 \pm 2\heartsuit\spadesuit + \spadesuit^2$, mit Binomialkoeffizienten.

b) Wie lauten die allgemeinen binomischen Formeln für $(\heartsuit + \spadesuit)^n$ bzw. $(\heartsuit - \spadesuit)^n$?

c) Zeigen Sie mit der allgem. binomischen Formel, dass die Summe aller Zahlen einer Zeile des Pascalschen Dreiecks 2^n ist. (Tipp: $\heartsuit = \spadesuit = 1$.)

d) Die Ziffern in Zeile 2 des Pascalschen Dreiecks ergeben zusammengefasst 121, was 11^2 ist; die in Zeile 3 ergeben 1331, was 11^3 ist. Erklären Sie diese Phänomen, und zeigen Sie, dass es nicht für alle Zeilen gilt.

4) Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und \leq eine antisymmetrische Ordnung, durch die alle Elemente in M vergleichbar sind. Jede Teilmenge $T \neq \emptyset$ von M habe ein größtes Element τ , d.h. $t \leq \tau$ für alle $t \in T$.

a) Nennen Sie Beispiele und Gegenbeispiele für solche Mengen, endliche und unendliche.

b) Zeigen Sie: Jede Teilmenge von M (und die Menge M selbst) hat genau ein größtes Element.

(Tipp: Nehmen Sie an, τ und σ seien größte Elemente einer Teilmenge T , und zeigen Sie, dass dann $\tau = \sigma$ ist.)

Wir nehmen zusätzlich an, dass es zu jedem $m \in M$ ein kleineres Element $n \in M$ gibt, $n < m$ (d.h. $n \leq m$ und $n \neq m$). Dann hat jedes $m \in M$ einen (direkten) Vorgänger, nämlich das größte Element in $S_m = \{s \in M \mid s < m\}$, also das größte aller kleineren Elemente.

c) Zeigen Sie: Das größte Element in M , wir bezeichnen es mit μ , ist kein Vorgänger eines anderen Elements.

d) Welche Zeilen der Tabelle ergeben in der richtigen Anordnung einen Beweis für die folgende Aussage? Notieren Sie die Buchstaben.

Die Vorgänger-Abbildung $V: M \rightarrow M$, $V(m) = m^*$ (m^* ist der Vorgänger von m) ist injektiv.

(Gezeigt wird: Wenn $a, b \in M$ und $a \neq b$, dann $a^* \neq b^*$.)

A	Damit ist $a^* \neq b^*$.
B	$\{a, b\}$ hat nach Voraussetzung ein kleinstes Element. Wir nehmen an, es gelte $a < b$.
C	$\{a, b\}$ hat nach Voraussetzung ein größtes Element. Wir nehmen an, es gelte $a < b$.
D	Also ist b^* nicht das kleinste aller Elemente, die größer als a sind.
E	Sei $a, b \in M$ und $a \neq b$.
F	Dann ist $a < b < b^*$, so dass b und b^* größere Elemente sind als a .
G	Also ist a^* nicht das größte aller Elemente, die kleiner als b sind.
H	Dann ist $a^* < a < b$, so dass a und a^* kleinere Elemente sind als b .