

Aufgaben mit Lösungen* zur Vorlesung Arithmetik – 10

(* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

- 1) Es ist $9 \times 12.345.679 = 111.111.111$. Erklären Sie dieses verblüffende Ergebnis, indem Sie statt des Neunfachen zunächst das Zehnfache der Zahl berechnen.

$$\begin{array}{r} 123456790 \quad (10x) \\ - 12345679 \quad (1x) \\ \hline 111111111 \quad (9x) \end{array}$$

- 2) Denken Sie sich drei verschiedene Ziffern. Bilden Sie daraus die kleinste und die größte dreistellige Zahl (Spiegelzahlen), und ziehen Sie die kleinere von der größeren Zahl ab (z.B. $543 - 345 = 198$). Vom Ergebnis bilden Sie wieder die Spiegelzahl, aber diesmal addieren Sie die beiden Zahlen ($198 + 891 = 1089$).

Zeigen Sie, dass das Ergebnis immer dasselbe ist, egal mit welchen Ziffern Sie beginnen.

Tipp: Hat eine dreistellige Zahl die Ziffern a (Einer), b (Zehner) und c (Hunderter), wobei $a = c + n$ sei, dann erhalten Sie an der Stellentafel die Spiegelzahl, indem Sie einfach n Plättchen vom 1er- ins 100er-Feld legen.

$$\begin{array}{r} c+n \mid b \mid c \\ - c \mid b \mid c+n \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} -1 \mid -1, +10 \mid +10 \\ \text{--->} \quad c+n \mid b \mid c \\ \text{--->} \quad -c \mid b \mid c+n \\ \hline n-1 \mid 9 \mid 10-n \end{array} \quad \begin{array}{r} n-1 \mid 9 \mid 10-n \\ + 10-n \mid 9 \mid n-1 \\ \hline 1 \mid 1 \mid \mid \\ \hline 1 \mid 0 \mid 8 \mid 9 \end{array}$$

Oder:

Um die Zahl an der Stellentafel umzudrehen, muss man nur n Plättchen von der 100er-Stelle in die 1er-Stelle legen: $\boxed{c \mid b \mid c+n} \Rightarrow \boxed{c+n \mid b \mid c}$. Das entspricht der Rechenoperation $+n \cdot 100 - n = +n(100 - 1) = +n \cdot 99$. Also ist der Unterschied der beiden Zahlen $n \cdot 99$.

Diese Zahl $n \cdot 99$ erhält man an der Stellentafel, indem man die Zahl n von $n \cdot 100$ subtrahiert, $n \cdot 100 - n$: $\boxed{n-1 \mid 9 \mid 10-n}$.

Die Spiegelzahl ist folglich $\boxed{10-n \mid 9 \mid n-1}$; und die Summe der beiden ist:

$$\boxed{(10-n)+(n-1) \mid 9+9 \mid (n-1)+(10-n)} = \boxed{10-1 \mid 18 \mid 10-1} = \boxed{1 \mid 0 \mid 8 \mid 9}.$$

- 3) Die sog. Neunerprobe dient zur Überprüfung von Rechenergebnissen. Sind nämlich x , y und z ganze Zahlen, und soll $z = x \cdot y$ sein, dann berechnet man zu Überprüfung zunächst die Reste dieser Zahlen, die sich bei Division durch 9 ergeben: Das seien hier $r_9(x)$, $r_9(y)$ sowie $r_9(z)$, die sog. 9er-Reste. Anschließend berechnet man vom Produkt $r_9(x) \cdot r_9(y)$ wiederum den 9er-Rest, also $r_9(r_9(x) \cdot r_9(y))$. Diese Zahl muss gleich $r_9(z)$ sein. Ist sie es nicht, dann ist die Rechnung falsch.

Z.B.: $123 \cdot 32 = 3.836$ (?) $r_9(123) = 6$, $r_9(32) = 5$, $r_9(6 \cdot 5) = 3$ aber $r_9(3.836) = 2$ ☹

Ähnliches gilt auch für die Summe und Differenz von x und y aber für den Quotienten nur eingeschränkt.

Überprüfen Sie damit die Rechnungen

- $23.456.789 + 98.765.432 = 122.222.221$.
- $111.111.111.111 \cdot 111.111.111.111 = 12.345.679.012.320.987.654.321$
- $588.235.294.117.647 : 1233 = 477.076.475.359$

$23.456.789 \equiv 8$, $98.765.432 \equiv 8$, $122.222.221 \equiv 7$ (alles: mod 9) und $8+8 \equiv 7 \pmod{9}$

$111.111.111.111 \equiv 3$, $12.345.679.012.320.987.654.321 \equiv 0$ und $3 \cdot 3 \equiv 0$.

$588.235.294.117.647 \equiv 0$, $1233 \equiv 0$, $477.076.475.359 \equiv 1$ und $1 \cdot 0 \equiv 0$.

4a) Vervollständigen Sie die Multiplikationstabelle für C_{13} , und bestimmen Sie damit die Kehrwerte der Zahlen 2, 3, ..., 12 ($1 \oplus 2 = \underline{\quad}$, $1 \oplus 3 = \underline{\quad}$, ..., $1 \oplus 12 = \underline{\quad}$).

$1 \oplus 2 = 7$, $1 \oplus 3 = 9$, $1 \oplus 4 = 10$, $1 \oplus 5 = 8$, $1 \oplus 6 = 11$,

$1 \oplus 7 = 2$, $1 \oplus 9 = 3$, $1 \oplus 10 = 4$, $1 \oplus 8 = 5$, $1 \oplus 11 = 6$, $1 \oplus 12 = 12$

b) Bei der schriftlichen Division von $1/13$ kommen folgende Reste vor: 1, 10, 9, 12, 3, 4 (in dieser Reihenfolge). Zeigen Sie, dass diese Teilmenge von C_{13} ebenfalls abgeschlossen ist bzgl.

Multiplikation und Kehrwertbildung in C_{13} . (Markieren Sie hinsichtlich der Multiplikation die entsprechenden Einträge in der obigen Tabelle)

Die Produkte dieser Zahlen sind allesamt wieder solche Zahlen.

\otimes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0	2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
3	0	3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
4	0	4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
5	0	5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
6	0	6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
7	0	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
8	0	8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
9	0	9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
10	0	10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
11	0	11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2
12	0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1