

## Aufgaben mit Lösungen\* zur Vorlesung Arithmetik – 11

(\* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

- 1a) Bestimmen Sie die Periodenlänge von  $1/23$  mithilfe der Potenzen von 10 modulo 23, bestimmen Sie also den kleinsten Exponenten  $n$ , so dass  $10^n \equiv 1 \pmod{23}$  (s.a. Vorlesung).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	46	69	92	115	138	161	184	207

$$10 \equiv 10 \pmod{23}$$

$$10^2 \equiv 8 \pmod{23}$$

$$10^3 \equiv 8 \cdot 10 \equiv 11 \pmod{23}$$

$$10^5 \equiv 8 \cdot 11 \equiv -4 \pmod{23}$$

$$10^{10} \equiv 16 \pmod{23}$$

$$10^{11} \equiv -1 \pmod{23}$$

- b) Wie groß ist die Periodenlänge von  $1/23$  im 2er-System (Potenzenmethode modulo 23 ähnlich wie unter b).

$$2 \equiv 2 \pmod{23}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{23}$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{23}$$

$$2^5 \equiv 8 \cdot 4 \equiv 9 \pmod{23}$$

$$2^{10} \equiv 12 \pmod{23}$$

$$2^{11} \equiv 1 \pmod{23}$$

- 2) Der letzte Tag im Februar 2000 war ein Dienstag (29. Februar 2000). Berechnen Sie, auf welche Wochentage der letzte Tag im Februar in den Jahren 1600, 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300, 2400 fiel/fällt.

$$29.02.1600 \rightarrow 28.02.1700: 100 + 24 \equiv 2 + 3 \equiv -2 \pmod{7}$$

$$28.02.1700 \rightarrow 28.02.1800: 100 + 24 \equiv 2 + 3 \equiv -2 \pmod{7}$$

$$28.02.1800 \rightarrow 28.02.1900: 100 + 24 \equiv 2 + 3 \equiv -2 \pmod{7}$$

$$28.02.1900 \rightarrow 29.02.2000: 100 + 25 \equiv 2 + 4 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$\rightarrow 1900: \text{Mi.} \quad 1800: \text{Fr.} \quad 1700: \text{So.} \quad 1600: \text{Di.}$$

$$2000 - 2004: \text{Di., So., Fr., Mi., Di.}$$

- 3) Bestimmen Sie nach der Doomsday-Methode den Wochentag

a) des Geburtstags von Carl Friedrich Gauss: 30. April 1777,

b) der ersten bemannten Mondlandung, 21. Juli 1969 (um 3:56 Uhr MEZ),

c) Ihres eigenen Geburtstags.

a) 29.2.1600: Di.

$$\rightarrow 28.2.1700: \text{So.} \quad (100+24 \equiv 2+3 \equiv 5 \equiv -2 \pmod{7})$$

$$\rightarrow 28.2.1777: \text{Fr.} \quad (77+19 \equiv 0+5 \equiv -2 \pmod{7})$$

$$\rightarrow 4.4.1777: \text{Fr.} \quad (= 28.2.1777)$$

$$\rightarrow 30.4.1777: \text{Mi.} \quad (26 \equiv 5 \equiv -2 \pmod{7})$$

b) 29.2.1600: Di.

$$\rightarrow 28.2.1700: \text{So.} \quad (100+24 \equiv 2+3 \equiv 5 \equiv -2 \pmod{7})$$

$$\rightarrow 28.2.1800: \text{Fr.} \quad (100+24 \equiv 2+3 \equiv 5 \equiv -2 \pmod{7})$$

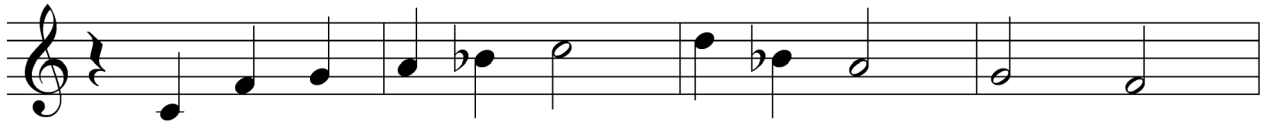
$$\rightarrow 28.2.1900: \text{Mi.} \quad (100+24 \equiv 2+3 \equiv 5 \equiv -2 \pmod{7})$$

$$\rightarrow 28.2.1969: \text{Fr.} \quad (69+17 \equiv -1+3 \equiv 2 \pmod{7})$$

$$\rightarrow 11.7.1969: \text{Fr.} \quad (= 28.2.1969)$$

$$\rightarrow 21.7.1969: \text{Mo.} \quad (10 \equiv 3 \pmod{7})$$

4) Transponieren Sie die folgende Melodie so, dass sie nicht mit c sondern dem tieferliegenden g beginnt. Gehen Sie dabei so vor wie im nachfolgenden Beispiel.



40 45 47 49 4A 50 52 4A 49 47 45

37 40 42 44 45 47 49 45 44 42 40

Beim **Transponieren** eines Musikstückes werden alle Töne um den gleichen Höhenabstand verändert; die Abstände der Tonhöhen innerhalb des Stückes bleiben jedoch gleich. Arithmetisch gesehen wird dabei jeder Ton um die gleiche Anzahl an Halbtonschritten verändert. Deshalb nummerieren wir die Töne der 12-stufigen Tonleiter bei C beginnend von 0 bis 11 im 12er-System durch (mit A für 10 und B für 11) und setzen davor noch die Nummer der jeweiligen Oktave am Klavier; also z.B. 42 für die Note Nr. 2 (=d) in der 4. Oktave. So wird jeder Ton eindeutig mit einer zweistellige Zahl bezeichnet. (Nach 4B kommt die Notennummer 50, und vor 40 kommt 3B.)

c cis d dis e f fis g gis a ais h

40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 4A 4B

Zum Transponieren müssen wir dann lediglich die gewünschte Anzahl an Halbtonschritten zur jeweiligen Notennummer addieren bzw. davon subtrahieren.

Wir transponieren auf diese Weise die folgende Melodie, so dass sie mit e beginnt. Die Noten geben wir dabei sowohl als Nummern an als auch in herkömmlicher Schreibweise.

40 42 44 45 47 49 47 45 44 42 40

c d e f g a g f e d c

44 46 48 49 4B 51 4B 49 48 46 44

e fis gis a h cis h a gis fis e