Michael Johann

# Aufgaben mit Lösungen* zur Vorlesung Arithmetik – 2

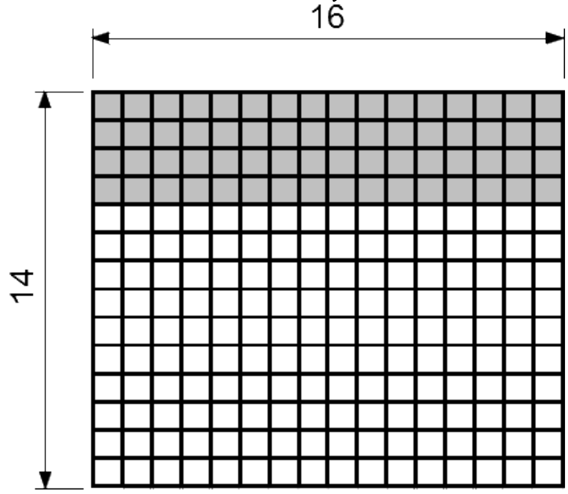
(* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

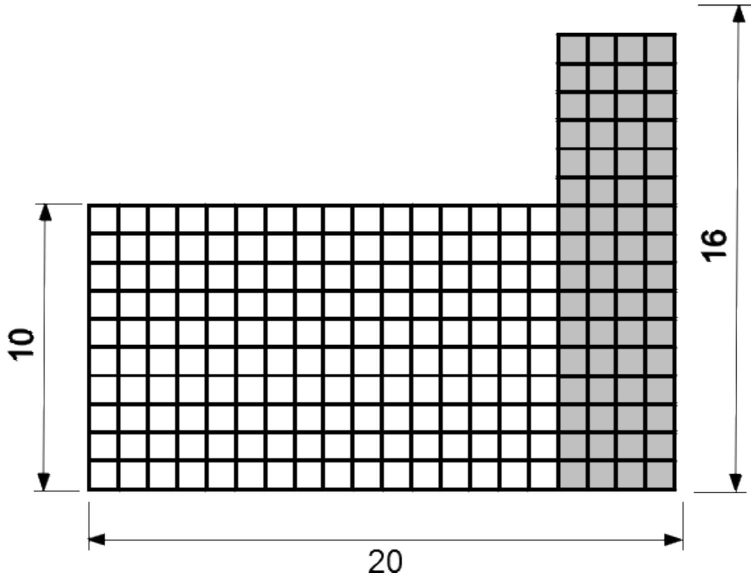
1) Das Produkt $14 \cdot 16$ lässt sich berechnen, indem man das Produkt der beiden Nachbarzehner $(20 \cdot 10)$ und das Produkt der Einer $(4 \cdot 6)$ addiert: $14 \cdot 16 = 20 \cdot 10 + 4 \cdot 6$.

<u>Weitere Beispiele:</u>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $12 \cdot 18$ | = | $20 \cdot 10$ | + | $2 \cdot 8$ |
| $13 \cdot 17$ | = | $20 \cdot 10$ | + | $3 \cdot 7$ |
| $34 \cdot 36$ | = | $40 \cdot 30$ | + | $4 \cdot 6$ |
| $63 \cdot 67$ | = | $70 \cdot 60$ | + | $3 \cdot 7$ |

- Verwenden Sie ein Rechteck aus $14 \cdot 16$ Punkten (o.Ä.), um diesen Rechenweg zu begründen. (Schneiden Sie einen geeigneten Streifen davon ab, um ihn woanders wieder anzulegen.)
- Formulieren Sie mit Variablen eine allgemeine Rechenregel dazu. (Eine zweistellige Zahl können Sie allgemein als $10a + b$ notieren, wobei a für die Zehnerziffer und b für die Einerziffer steht).




Allgemein: Das Produkt zweier 2-stelliger Zahlen, $10a + b$ und $10a + (10-b)$, mit gleichen Zehnerziffern, aber Einerziffern, die sich zu 10 ergänzen, lässt sich berechnen, indem man das Produkt der Nachbarzehner und das Produkt der Einer addiert:

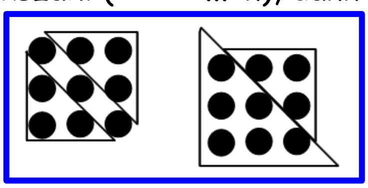
$$[10a + b] \cdot [10a + (10-b)] = 10a \cdot 10(a+1) + b \cdot (10-b).$$

2a) Ist $Q_n$ die $n$-te Quadratzahl ($= n^2$) und $\Delta_n$ die $n$-te Dreieckszahl ($= 1+2+...+n$), dann gilt

$Q_n = n + 2\Delta_{n-1}$ und

$Q_n = \Delta_n + \Delta_{n-1}$

Begründen Sie diese Zusammenhänge an Punktmustern.



b) Finden Sie eine Formel mit Dreieckszahlen für die Summe

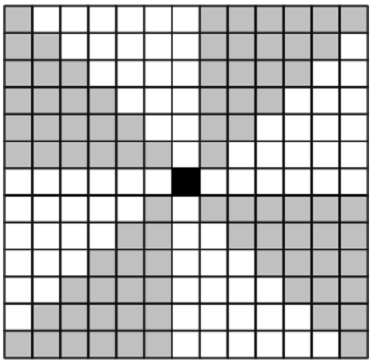
$$1 + 2 + ... + (n-1) + n + (n-1) + ... + 2 + 1$$

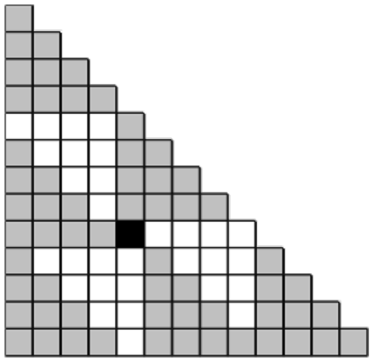
und begründen Sie diese Formel an Punktmustern.

$Q_n = n + 2\Delta_{n-1}$ und $Q_n = \Delta_n + \Delta_{n-1}$ (s. Aufgabe 2)

3a) Die beiden Zeichnungen (s. nächste Seite) dienen zur Begründung zweier Gleichungen über Dreieckszahlen. Wie lauten diese Gleichungen jeweils?

(Tipp: Bezeichnen Sie mit $\Delta_n$ die Anzahl der Kästchen in einem Dreieck aus $1+2+...+n$ Kästchen, und verwenden Sie dieses $n$ um die Anzahl aller Kästchen in der Gesamtfigur anzugeben.)





$8\Delta_n + 1 = (2n+1)^2$ $\qquad$ $9\Delta_n + 1 = \Delta_{3n+1}$

b) Unter den Dreieckszahlen gibt es unendlich viele Quadratzahlen, denn $\Delta_1 = 1$ ist eine Quadratzahl und es gilt:

$$\Delta_{8\Delta_n} = \frac{1}{2}\cdot 8\Delta_n \cdot (8\Delta_n + 1) = 4\Delta_n \cdot (2n+1)^2$$

Erläutern Sie dies Gleichung mithilfe von Teil a) dieser Aufgabe und der Summenformel für die ersten *n* Zahlen. Berechnen Sie außerdem damit die nächsten beiden Dreieckszahlen, die auch Quadratzahlen sind. (Es gibt noch andere Dreieckszahlen, die ebenfalls Quadratzahlen sind, aber nicht nach diesem Schema berechnet werden. Z.B. ist $\Delta_{49} = 1+2+...+49 = \frac{1}{2}\cdot 49\cdot 50 = 49\cdot 25 = (7\cdot 5)^2$ )

$\Delta_{8\Delta_n} = \frac{1}{2}\cdot 8\Delta_n \cdot (8\Delta_n + 1)$ wegen $1+2+...+k = \frac{1}{2}\cdot k\cdot(k+1)$,

und $\frac{1}{2}\cdot 8\Delta_n \cdot (8\Delta_n + 1) = 4\Delta_n \cdot (2n+1)^2$ wegen a) $8\Delta_n + 1 = (2n+1)^2$

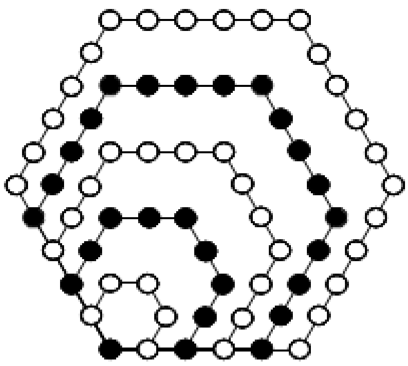
Ist nun $\Delta_n = m^2$ eine Quadratzahl dann gilt das auch für

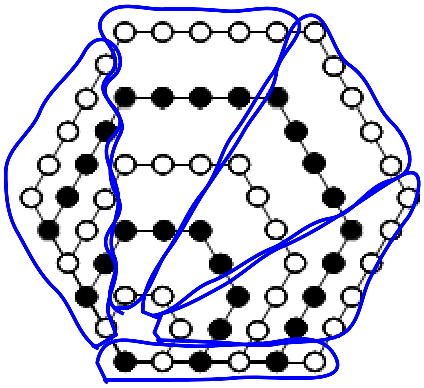
$$\Delta_{8\Delta_n} = 4\Delta_n \cdot (2n+1)^2 = 4\cdot m^2 \cdot (2n+1)^2 = \left(2\cdot m\cdot(2n+1)\right)^2$$

$\Delta_{8\Delta_1} = \Delta_8 = 4\Delta_1 \cdot (2\cdot 1+1)^2 = 36 = 6^2$ $\qquad$ $\Delta_{8\Delta_8} = \Delta_{288} = 4\Delta_8 \cdot (2\cdot 8+1)^2 = 41616 = 204^2$

4) Hexagonalzahlen erhält man analog zur Folge der Quadratzahlen durch sukzessives Anfügen von Winkelhagen derart, dass immer größere Sechseckmuster entstehen. Ist $H_n$ die *n*-te Hexagonalzahl ($H_1 = 1$, $H_2 = 6$, $H_3 = 15$, ...), dann gilt: $H_n = n + 4\Delta_{n-1}$

Begründen Sie diese Formel an nebenstehendem Punktmuster.





5a) Eine natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe all ihrer Teiler ist außer ihr selbst; Beispiele sind 6 = 1 + 2 + 3 oder 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Ist $p = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$ eine Primzahl,
dann ist $p \cdot 2^n$ eine vollkommene Zahl.
(Euklid: Elemente, IX, 36)

Vervollständigen Sie folgenden Beweis:
Es gibt es zwei unterschiedliche Arten von Teilern der Zahl $p \cdot 2^n$:
- zum einen die Zweierpotenzen $1, 2, 4, \ldots, 2^n$
- und zum anderen deren Produkte mit p, d.h. $1 \cdot p, 2 \cdot p, \ldots, 2^n \cdot p$.

Die Summe all dieser Teiler außer der Zahl $2^n \cdot p$ selbst ist:
$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n + 1 \cdot p + 2 \cdot p + \ldots + 2^{n-1} \cdot p = p + p \cdot (1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1}) = p + p \cdot (2^n - 1) = p \cdot 2^n$.

b) Zeigen Sie: Die obige, vollkommene Zahl $p \cdot 2^n$ ist eine Dreieckszahl.
Es ist $p = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ und somit
$p \cdot 2^n = (2^{n+1} - 1) \cdot 2^n = (2^{n+1} - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^n = \frac{1}{2} \cdot (2^{n+1} - 1) \cdot 2^{n+1} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (2^{n+1} - 1) = \Delta_{2^{n+1}-1}$

6) Berechnen Sie die Summe 211 + 218 + 225 + ... + 295.
*Allgemein*: Berechnen Sie die Summe a + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + nb).

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 211 & + & 218 & + & 225 & + & \ldots & + & 295 \\ + & 295 & + & 288 & + & 281 & + & \ldots & + & 211 \\ \hline & 506 & + & 506 & + & 506 & + & \ldots & + & 506 \end{array} = 13 \cdot 506 = 6578, \quad 6578/2 = 3289$$

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & (a+b) & + & (a+2b) & + & \ldots & + & (a+nb) \\ a+nb & + & a+(n-1)b & + & a+(n-2)b & + & \ldots & + & a \\ \hline 2a+nb & + & 2a+nb & + & 2a+nb & + & \ldots & + & 2a+nb \end{array} = (n+1) \cdot (2a+nb),$$

»» $a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (a+nb) = \frac{1}{2}(n+1)(2a+nb)$

7) Berechnen Sie die unendlichen Summen
a) 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... b) 1/3 + 1/9 + 1/27 + ...

$$\begin{array}{ll} & 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots \\ - & \quad\; 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots \\ \hline & 1 \end{array}$$

( = 2*s* mit *s* = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... )
andererseits 2s - s = s »» s = 1

$$\begin{array}{ll} & 1 + 1/3 + 1/9 + \ldots \\ - & \quad\; 1/3 + 1/9 + 1/27 + \ldots \\ \hline & 1 \end{array}$$

( = 3s mit s = 1/3 + 1/9 + 1/27 + ... )
andererseits: 3s - s = 2s, also 2s = 1 »» s = 1/2