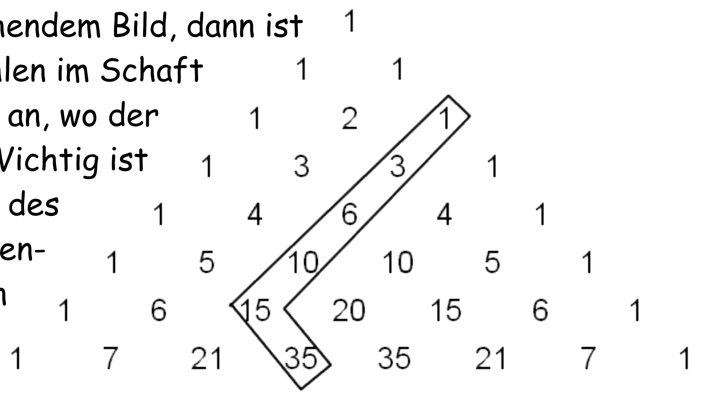
Michael Johann

Aufgaben mit Lösungen* zur Vorlesung Arithmetik – 3

(* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

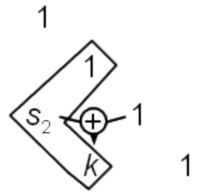
1) Fasst man Zahlen im Pascal'schen Dreieck so zusammen, dass die Kontur an einen Eishockeyschläger erinnert, wie in nebenstehendem Bild, dann ist die Zahl in der Kelle (35) die Summe der Zahlen im Schaft (1+3+6+ 10+15). Dabei kommt es nicht darauf an, wo der Eishockeyschläger liegt und wie lang er ist. Wichtig ist nur, dass der Schaft bis zu einer Außenseite des Dreiecks reicht und parallel zur anderen Außenseite ist; außerdem muss die Kelle nach unten gerichtet sein und darf nur eine Zahl beinhalten.



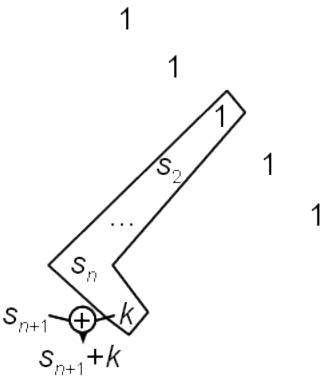
Beweisen Sie diese Regel durch vollständige Induktion!
(Tipp: Die Zahlen im Schaft seien $s_1,\dots,s_n$ und die Zahl in der Kelle sei k.)

Da der Schaft an der Außenseite des Dreiecks beginnt, ist die erste Zahl darin stets 1, $s_1 = 1$.

Induktionsanfang: Den Schaft bilden die Zahlen s_1 (= 1) und s_2, die Kelle die Zahl k. Nach der Bildungsregel des Pascal'schen Dreiecks ist $k = s_2 + 1$. Also gilt hier die Eishockeyschläger-Regel.



Induktionsschritt (Dominoeffekt): Wir nehmen an, die Regel gelte für einen Schläger mit einem Schaft aus den Zahlen s_1 (= 1), $s_2,\dots,s_n$ und einer Kelle k, d.h. $k = s_1 + s_2 +\dots+ s_n$. Wenn wir diesen Schaft um eine Zahl (= s_{n+1}) verlängern, dann ist $s_{n+1} + k$ die neue Kelle nach dem Bildungsgesetz des Pascal'schen Dreiecks. Und weil $k = s_1 + s_2 +\dots+ s_n$ ist, ist die Kelle des erweiterten Schlägers die Summe aller Zahlen des Schafts $s_1 + s_2 +\dots+ s_n + s_{n+1}$.



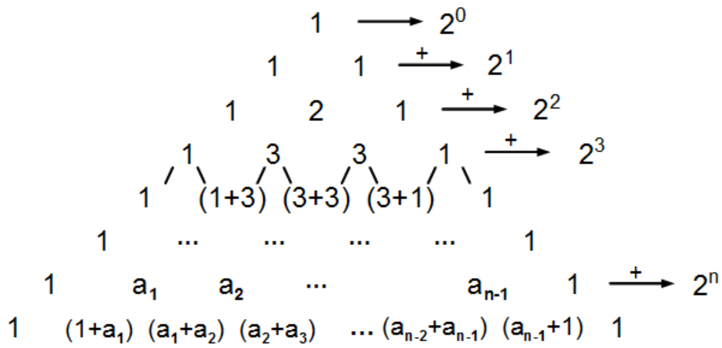
2) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Im Pascalschen Dreieck ist die Summe aller Zahlen einer Zeile gleich 2^n. (n ist die Nummer der Zeile, wobei die Spitze des Dreiecks die Nummer 0 hat.) Tipp: Bezeichnen Sie die Zahlen der Zeile n mit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$.

Induktionsanfang:

Zeile 0: $1=2^0$.

(Zeile 1: $1+1=2^1$. Zeile 2: $1+2+1=2^2$.)

Die Grafik zeigt, dass in Zeile 4 jeder Summand aus Zeile 3 zweimal vorkommt. Deshalb ist die Summe der Zahlen in Zeile 4 das Doppelte der Summe von Zeile 3. Das gilt allgemein:



Induktionsschritt: In Zeile n sind n+1 Zahlen: $1, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 1$. Daraus ergeben sich die Zahlen in der nächsten Zeile (Nummer n+1). Und die Summe dieser (n+1)-ten Zeile ist:

$$1 + (1 + a_1) + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + ... + (a_{n-2} + a_{n-1}) + (a_{n-1} + 1) + 1.$$
$$= 1 + 1 + a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n-1} + 1 + 1$$
$$= 2 \cdot (1 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + 1)$$

Das ist das Doppelte der Summe der Zeile n. Und wenn diese Summe in Zeile n gleich 2^n ist, dann ist die Summe der Zeile n+1 gleich $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

3) Zeigen Sie: Das Ausmultiplizieren von $(a+b+c)^5$ ergibt $\binom{3+5-1}{5}$ = 21 Summanden mit unterschiedlichen Exponenten.
Begründen Sie also an diesem Beispiel die allgemeine Formel für Kombinationen mit Wiederholungen. (Tipp: Die Summe der Exponenten ist immer 5.)

Die unterschiedlichen Potenzen können wie in der Tabelle notiert werden. Dann entspricht jedem Ausdruck $a^u b^v c^w$ eindeutig eine Sequenz aus 2 Trennstrichen und 5 Punkten, z.B. ••|•|•• für $a^2b^1c^2$.

z.B.:	a	b	c	1	2	3	4	5	6	7
$a^2b^1c^2$	••	•	••	•	•	$\vert$	•	$\vert$	•	•
$a^0b^4c^1$		••••	•	$\vert$	•	•	•	•	$\vert$	•
....										

Die Anzahl solcher Sequenzen ist $\binom{3+5-1}{5}$, weil 3+5-1 Positionen mit 5 Punkten zu besetzen sind; auf die übrigen Positionen kommen die Striche. Gleichwertig dazu ist $\binom{3+5-1}{2}$, weil man auch zunächst 2 Positionen aus den 3+5-1 für die Striche auswählen kann.

4) Bestimmen Sie kombinatorisch die Summe aller 4-stelligen Zahlen, die aus den Ziffern 1, 3, 5 und 7 gebildet werden können. Dabei sollen in jeder Zahl alle 4 Ziffern vorkommen.
Es gibt 4! = 24 Permutationen der Sequenz 1357.
3! = 6 von diesen Zahlen beginnen mit 1; und ebenso viele mit 3 bzw. 5 oder 7.
Also kommt beim Addieren an jeder Stelle 6 mal die 1 vor und 6 mal die 3, 6 mal die 5 und 6 mal die 7. Das ergibt somit 6×(1+3+5+7) = 96 bei den Einern, Zehnern, Hundertern und Tausendern.
Folglich ist die Summe 96(1+10+100+1000) = 106.656.

5) Auf wie viele Arten kann man 8 verschiedene Bücher auf 3 Schüler verteilen, wenn Kim 2 Bücher und Tim und Jim je 3 Bücher erhalten sollen? (Tipp: Denken Sie sich die Bücher von 1 bis 8 nummeriert und den Schülern passend zugeordnet.)
Wir kürzen die Namen der Schüler mit den Initialen ab: K, T, J.
Dann entspricht jede Sequenz der Länge 8, die aus 2 Ks, 3 Ts und 3 Js besteht, einer passenden Verteilung der Bücher, z.B. K T J K J T T J (K erhält B_1, B_4; T erhält B_2, B_6 und B_7; J erhält B_3, B_5 und B_8). Die Anzahl solcher Sequenzen ist die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen der Elemente K, T und J, wobei K mit der Vielfachheit 2, T und J jeweils mit der Vielfachheit 3 vorkommen:

$$\frac{(2+3+3)!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = 560$$

ODER: Es werden 2 aus 8 Büchern für Kim ausgewählt. Für jede solche Auswahl gibt es dann noch 3 aus 6 Möglichkeiten, 3 Bücher für Tim auszuwählen. Die restlichen 3 Bücher erhält schließlich Jim:

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3}$$

6) Wie viele Zahlen zwischen 1.000 und 9.999 haben keine Ziffer mehrfach?

Wäre die 0 an der Tausenderstelle erlaubt, dann wären es alle Variationen ohne Wiederholungen mit 4 Gliedern Länge aus der Menge {0,1,...9}. Das sind:

$$\binom{10}{4} \cdot 4! = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Wir müssen davon also die Anzahl der Variationen subtrahieren, die eine 0 an der Tausender-stelle haben. Da an den übrigen drei Stellen dann nur noch die Ziffern 1 bis 9 vorkommen, sind das die Variationen ohne Wiederholungen mit 3 Gliedern Länge aus der Menge {1,...9}:

$$\binom{9}{3} \cdot 3! = \frac{9!}{(9-3)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Folglich gibt es $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$ Zahlen zwischen 1.000 und 9.999, die keine Ziffer mehrfach haben.

Grundaufgaben der Kombinatorik

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck heißen ***Binomialkoeffizienten***. Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ steht für die Zahl an der Stelle Nummer *k* in der Zeile Nummer *n*, wobei die Zählung jeweils mit 0 beginnt; und man sagt dazu ***„n über k“*** oder ***„k aus n“***.

Die Bildungsregel des Pascalschen Dreiecks, wonach die Summe zweier benachbarter Zahlen in einer Zeile die Zahl mittig unterhalb der beiden ergibt, kann mit dem Binomial-koeffizienten wie nebenstehend formuliert werden.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

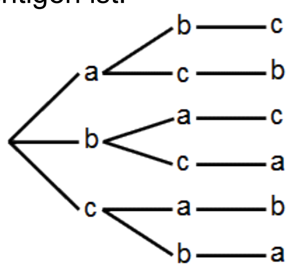
Es lässt sich zeigen, dass $\binom{n}{k}$ die Anzahl aller möglichen k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge ist. Z.B. gibt es von der 4er-Menge {a,b,c,d} genau $\binom{4}{2}$ also 6 Mengen mit je 2 Elementen: {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}. Deshalb kann der Binomialkoeffizient auch wie folgt berechnet werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{Bsp.: } \binom{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{1} = \frac{7!}{3! \cdot 4!}$$

In der Kombinatorik entsprechen den k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge die ***Kombinationen ohne Wiederholungen***. Bei Kombinationen bleibt die Reihenfolge der Elemente unberück-sichtigt – wie bei Mengen. Ein Beispiel dafür ist das Lotto „6 aus 49“: Es werden nacheinander 6 Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 49 verschiedenen Kugeln gezogen. Die Reihenfolge bleibt aber unberück-sichtigt. Dafür gibt es „6 aus 49“ mögliche Kombinationen.

Es gibt zwei wichtige Modelle der Kombinatorik, bei denen die Reihenfolge zu berücksichtigen ist:

► Als ***Permutationen*** einer Menge bezeichnet man die verschiedenen linearen Reihenfolgen, in denen die Elemente angeordnet werden können. Für eine 3-elementige Menge {a,b,c} gibt es z.B. 6 mögliche Anordnungen: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Hat die Menge *n* Elemente, dann ist die Anzahl:



$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

▶ Unter den ***Variationen mit Wiederholungen*** der Länge k aus einer Menge mit n Elementen, versteht man alle möglichen linearen Anordnungen mit genau k Gliedern, die aus der Menge mit n Elementen kommen und sich wiederholen können. Z.B. gibt es 8 Variationen der Länge 3 aus der Menge {0,1}: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. I.Allg. ist die Anzahl: n^k

Von diesen Modellen der Kombinatorik lassen sich weitere Ableiten:

▶ ***Kombinationen mit Wiederholungen***: Aus einer Menge mit n Elementen werden Sequenzen gebildet, die k Glieder lang sind. Dabei können sich Glieder wiederholen, aber auf ihre Reihenfolge kommt es nicht an. Dann ist die Anzahl der Kombinationen: $\binom{n+k-1}{k}$

▶ ***Permutationen mit Wiederholungen***: Aus einer Menge mit den Elementen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ wird eine Sequenzen gebildet. Die Vielfachheit, mit der das Element m_1 darin stets vorkommt seit k_1, und allgemein sei k_t die Vielfachheit von m_t. Dann ist die Anzahl der unterschiedlichen Anordnungen dieser Sequenz:

$$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

▶ ***Variationen ohne Wiederholungen***: Aus einer Menge mit n Elementen werden Sequenzen gebildet, die k Glieder lang sind. Jedes Glied kommt nur einmal vor. Damit ist insbesondere $k \leqslant n$. Die Anzahl dieser Sequenzen ist: $\frac{n!}{(n-k)!}$ oder $\binom{n}{k} \cdot k!$