Michael Johann

Aufgaben mit Lösungen* zur Vorlesung Arithmetik – 4

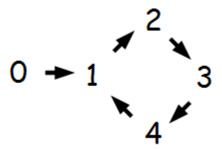
(* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

1a) Begründen Sie, weshalb folgende Mengen keine Modelle der Dedekind-Peano-Axiome sind:

i) $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$

(d.h. $\infty \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$)

ii)



b) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome an der Menge $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ (das sind die Primzahlen sowie die Zahlen 0 und 1).

a)

Zu i:

1. Argument: Für die Teilmenge $M=\{0, 1, 2, \ldots\}$ von $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ gilt:

- 0 ist darin enthalten, und
- mit jeder Zahl n auch ihr Nachfolger n'.

Aber $M \neq \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$, es fehlt „$\infty$".

2. Argument: „∞" hat keinen Nachfolger.

Zu ii:

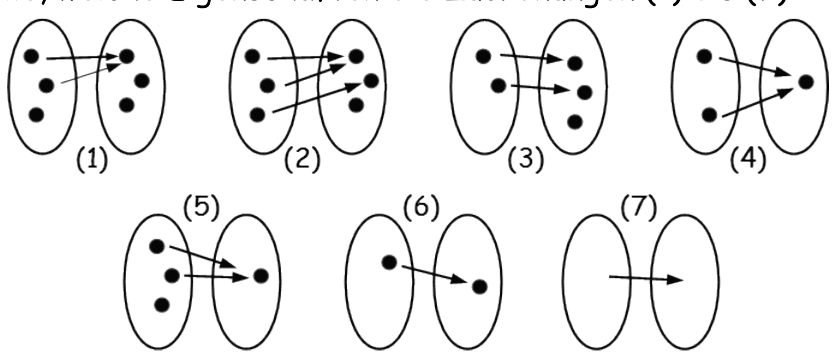
0 und 4 sind verschiedene nat. Zahlen, aber sie haben denselben Nachfolger nämlich 1. Man kann auch sagen: Die Nachfolgerabbildung σ ist nicht injektiv.

b)

Wir bezeichnen die Menge $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ mit P. Dann gilt:

- $0 \in P$
- Jedes Element $p \in P$ hat genau einen Nachfolger, denn zu jeder Primzahl gibt es genau eine nächst größere Primzahl.
- 0 ist kein Nachfolger eines Elements aus P.
- Verschiedene Elemente $p, q \in P$ haben verschiedene Nachfolger p' und q'.
  (Sind nämlich p und q Primzahlen, und ist z.B. $p < q$, dann ist die zu p nächst größere Primzahl nicht größer als q, d.h. $p' \leq q$. Und weil $q < q'$ ist, gilt $p' < q'$ und somit $p' \neq q'$.)
- Ist M irgendeine Teilmenge von P, in der die 0 enthalten ist und mit jedem Element p auch sein Nachfolger, dann umfasst M alle Elemente aus P, d.h. $M = P$.

2) Markieren Sie in der Tabelle, welche Eigenschaften die Zuordnungen (1) bis (7) jeweils haben.



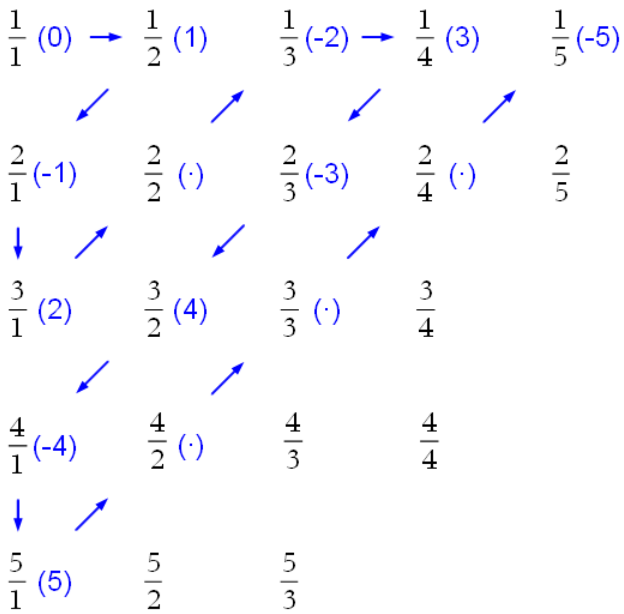
	Zuordnung	Abbildung	injektiv	surjektiv	bijektiv
(1)	✓				
(2)	✓	✓			
(3)	✓	✓	✓		
(4)	✓	✓		✓	
(5)	✓				
(6)	✓	✓	✓	✓	✓
(7)	✓	✓	✓	✓	✓

3) Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung gibt

a) von $\mathbb{Z}$ nach {2, 4, 6, 8, ...},

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \end{array}$$

b) von $\mathbb{Z}$ in die Menge der Brüche n/m mit n, m $\in \mathbb{N}$. (Unter Verwendung des 1. Cantorschen Diagonalverfahrens.) (Skizzieren der Beweisidee genügt!)



<u>Definition:</u> Die *Potenzmenge* P(M) einer Menge M ist die Menge aller Teil-mengen von M, also P(M) = { X | X $\subseteq$ M }.
<u>Bsp.:</u> Für M={ 1, 2, 3} ist P(M) = { { }, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3} }

4) Die Potenzmenge von {a,b,c} hat doppelt so viele Elemente wie die Potenzmenge von {a,b}: $|P(\{a,b,c\})| = 2\cdot|P(\{a,b\})|$. Denn $P(\{a,b,c\})$ lässt sich wie folgt in zwei gleich große, disjunkte* Teilmengen zerlegen, wovon die eine $P(\{a,b\})$ ist:

$P(\{a,b,c\}) = \{\{\},\{a\},\{b\},\{a,b\}\} \cup \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

(*) disjunkt: die Mengen haben keinerlei gemeinsame Elemente

a) Zeigen Sie in gleicher Weise, dass die Potenzmenge von {a,b,c,d} doppelt so viele Elemente hat wie die Potenzmenge von {a,b,c}: $|P(\{a,b,c,d\})| = 2\cdot|P(\{a,b,c\})|$.

Tipp: Notieren Sie die beiden disjunkten Teilmengen von P({a,b,c,d}), und beachten Sie, dass es eine besonders nahe liegende Bijektion zwischen ihnen gibt.

zu a) P({a,b,c,d}) = P({a,b,c}) ∪ D:
P({a,b,c}) = { { }, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {b,c}, {a,c}, {a,b,c} }
D = { {d}, {a,d}, {b,d}, {c,d}, {a,b,d}, {b,c,d}, {a,c,d}, {a,b,c,d} }
Wegen P({a,b,c,d}) = P({a,b,c}) ∪ D und P({a,b,c}) ∩ D = { } ist |P({a,b,c,d})| = |P({a,b,c})| + |D|.
Da |P({a,b,c})| = |D|, gilt schließlich |P({a,b,c,d})| = 2·|P({a,b,c})|

b) Allgemein gilt:

Ist M eine endliche Menge und m ein Element darin, dann hat die Potenzmenge von M doppelt so viele Elemente wie die Potenzmenge von M ohne m: $|P(M)| = 2 \cdot |P(M \setminus \{m\})|$.

Vervollständigen Sie den folgenden Beweis dieser Aussage:

Wir zerlegen $P(M)$ in die folgenden beiden Teilmengen:

- $P(M \setminus \{m\}) = \{T \subseteq M \mid m \notin T\}$ (Teilmengen von M, in denen m nicht vorkommt.)
- $B = \{T \subseteq M \mid m \in T\}$ (Teilmengen von M, in denen m vorkommt.)

Wegen $P(M) = P(M \setminus \{m\}) \cup B$ und $P(M \setminus \{m\}) \cap B = \emptyset$ ist $|P(M)| = |P(M \setminus \{m\})| + |B|$

Da weiterhin $f(X) = X \cup \{m\}$ eine bijektive Abbildung von $P(M \setminus \{m\})$ nach B ist, gilt $|P(M \setminus \{m\})| = |B|$. Deshalb hat $P(M)$ doppelt so viele Elemente wie jede der beiden Mengen, und es ist $|P(M)| = 2 \cdot |P(M \setminus \{m\})|$.

5) Setzen Sie in die Lücken passende Ausdrücke oder Symbole ein:

Ist M eine unendliche Menge, dann existiert keine surjektive/bijektive Abbildung $f: M \to P(M)$ (s. Satz von Cantor).

Beweis: Zu einer Abbildung $f: M \to P(M)$ betrachten wir folgende Teilmenge A von M:

- $A = \{m \in M \mid m \notin f(m)\} \subseteq M$

  (Elemente, die nicht in der Teilmenge enthalten sind, auf die sie abgebildet werden)

Angenommen, es gäbe ein a in M, das auf diese Menge A abgebildet wird: $f(a) = A$.

Dann stellt sich die Frage, ob a in A enthalten ist oder nicht.

- Ist $a \in A$, dann gilt nach der Definition der Menge A: $a \notin f(a)$. Aber weil $f(a) = A$ ist, ist das widersprüchlich.
- Ist hingegen $a \notin A$, dann gilt wegen $f(a) = A$ auch $a \notin f(a)$. Damit erfüllt a jedoch die Definitionsbedingung der Menge A und ist darin enthalten, was ebenfalls widersprüchlich ist.

Deshalb kann es ein solches Element a, das auf A abgebildet wird, nicht geben, und f ist somit nicht surjektiv/bijektiv.