

Aufgaben mit Lösungen* zur Vorlesung Arithmetik – 5

(* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

1) Mit der gleichen Idee wie beim 2. Cantorschen Diagonalverfahren lässt sich zeigen, dass die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen (die Potenzmenge $P(\mathbb{N})$) nicht abzählbar ist.

Bsp.: Beginnt eine Liste von Teilmengen mit: $A=\{3,5,7,\dots\}$, $B=\{1,4,6,8,\dots\}$, $C=\{1,2,4,7,10,\dots\}$, $D=\{2,4,5,8,11,\dots\}$ etc., dann notiert man die einzelnen Mengen in einer Tabelle mit der Überschrift \mathbb{N} als Folgen z.B. von Häkchen („ist Element“) und Strichen („ist nicht Element“):

N:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	
A:	–	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	...	
B:	✓	–	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	–	...	
C:	✓	✓	–	✓	–	–	✓	–	–	✓	–	...	
D:	–	✓	–	✓	✓	–	–	✓	–	–	✓	...	
...								

Ermitteln Sie daraus so wie beim Cantorschen Verfahren die ersten Elemente einer Teilmenge, die nicht in der Liste vorkommt, und begründen Sie Ihr Vorgehen.

	✓	✓	✓	–	...							
	–	–	–	✓	...							
N:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
A:	–	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	...
B:	✓	–	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	–	...
C:	✓	✓	–	✓	–	–	✓	–	–	✓	–	...
D:	–	✓	–	✓	✓	–	–	✓	–	–	✓	...
...							

$$= \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$= \{4, \dots\}$$

Die neue Menge beginnt mit 1, 2, 3 - die 4 gehört nicht dazu.

Sie unterscheidet sich von der ersten Menge durch die Zahl 1, weil diese zu ihr gehört, und ebenso von der 2. Menge in der Zahl 2 und der 3. Menge in der Zahl 3. Von der 4. Menge unterscheidet sie sich in der Zahl 4, weil diese nicht zu ihr gehört usw.

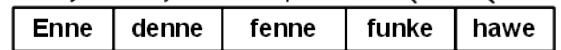
2) Der folgende Abzählreim soll zum Zählen verwendet werden:

„Enne, denne, fenne, funke, hawe, schnawe, niko, demo, futsch.“

a) Überprüfen Sie die Erfüllbarkeit der Zählprinzipien.

(Nehmen Sie an, der Reim sei der Anfang der Zahlwortreihe

aus einer fremden Sprache und lasse sich beliebig weit fortsetzen.)



Eins-zu-Eins-Zuordnung: Jedem Wort eines Anfangsabschnitts des Abzählreims wird genau ein Element der zu zählenden Menge zugeordnet, und kein Element wird ausgelassen.

Stabile Ordnung: Der Reim wird stets in derselben Reihenfolge der Wörter aufgesagt.

Kardinalzahlprinzip: Das zuletzt genannte Wort (hier: "hawe") kennzeichnet einen Anfangsabschnitt des Reims und damit die Anzahl der Elemente einer Menge, da sie den Wörtern des Abschnitts bijektiv zugeordnet sind. Wichtig ist, dass jedes Wort im Reim nur einmal vorkommt, weil sonst der Anfangsabschnitt durch das letzte Wort nicht eindeutig gekennzeichnet wird.

Abstraktionsprinzip: Das Zählverfahren kann auf jede (kleine) Menge - unabhängig von der Beschaffenheit der Elemente - angewandt werden (sofern sie abzählbar ist).

Irrelevanz der Anordnung: Egal in welcher Reihenfolge die Elemente einer bestimmten Menge beim Aufsagen des Reims durchlaufen werden, es ist immer derselbe Anfangsabschnitt und das letzte Wort ist damit auch immer dasselbe.

(Wegen der Endlichkeit des Reims ist seine Anwendung beschränkt. Andererseits sind auch unsere Zahlwörter nicht unendlich.)

b) Auf welcher Niveaustufe der Zählfähigkeit nach Fuson ordnen Sie sich hier selbst ein?

Niveau 2: Unbreakable chain level (unflexible Zahlwortreihe):

Die einzelnen Wörter können klar unterschieden werden, jedoch muss die Reihe immer als Ganzes aufgesagt werden (von "Enne" an).

Niveau 3: Breakable chain level (teilweise flexible Zahlwortreihe):

Der Reim kann von einem beliebigen Wort aus aufgesagt werden. (Eher nicht: Vorgänger und Nachfolger können genannt werden. Rückwärts zählen gelingt zum Teil.)

c) Setzen Sie in die Lücken passende Ausdrücke ein und vervollständigen Sie die Grafik:

Wenn der obige Abzählreim benutzt wird, um die Anzahl der Elemente von $\{A, B, C\}$ zu bestimmen, dann wird zunächst eine bijektive Abbildung zwischen dieser Menge und einem Anfangsabschnitt des Reims hergestellt. Dieser Abschnitt ist somit als explizite Anzahl der Elemente von $\{A, B, C\}$ verwendbar. Steht darüber hinaus das zuletzt genannte Reimwort als Zeichen für den ganzen Anfangsabschnitt, dann ist es als implizite Anzahl der Elemente von $\{A, B, C\}$ verwendbar.

