

Aufgaben mit Lösungen* zur Vorlesung Arithmetik – 6

(* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

1) „Übersetzen“ Sie:

$$641 = \frac{10 \cdot 1000 \cdot 0001}{2}$$

$$641 = \frac{1201}{8}$$

$$641 = \frac{281}{16}$$

$$111\ 1111_2 = \frac{127}{10}$$

$$111\ 1111_2 = \frac{177}{8}$$

$$111\ 1111_2 = \frac{7F}{16}$$

$$3599 = \frac{1;59;59}{6 \times 10}$$

$$1799 = \frac{29;59}{6 \times 10}$$

$$1;00;01_{6 \times 10} = \frac{3601}{10}$$

$$30;01_{6 \times 10} = \frac{1801}{10}$$

2) Addieren Sie (an der Stellentafel !):

2er System:

$$1100 + 1111 =$$

$$10 + 110 =$$

$$101 + 1010 =$$

8er-System:

$$752 + 544 =$$

$$764 + 13023 =$$

16er-System:

$$CB8 + EAF =$$

$$FF5 + 20033 =$$

6×10er-System:

$$2;53 + 3;49 =$$

$$9;57 + 1;19;03 =$$

2er-System:

$$\begin{array}{r} 1100 \\ + 1111 \\ \hline 11011 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ + 110 \\ \hline 1000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ + 1010 \\ \hline 1111 \end{array}$$

8er-System:

$$\begin{array}{r} 752 \\ + 544 \\ \hline 1516 \end{array} \quad \begin{array}{r} 764 \\ + 13023 \\ \hline 14007 \end{array}$$

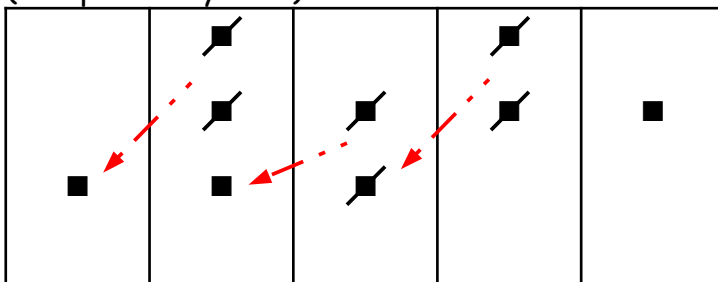
16er-System:

$$\begin{array}{r} CB8 \\ + EAF \\ \hline 1B67 \end{array} \quad \begin{array}{r} FF5 \\ + 20033 \\ \hline 21028 \end{array}$$

6×10er-System:

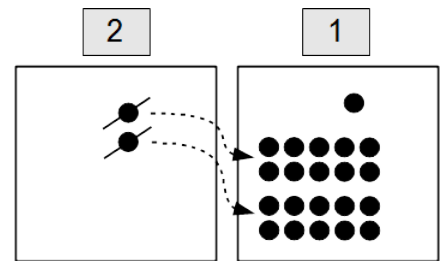
$$\begin{array}{r} 2;53 \\ + 3;49 \\ \hline 6;42 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9;57 \\ + 1;19;03 \\ \hline 1;29;00 \end{array}$$

(Beisp. 2er-System)



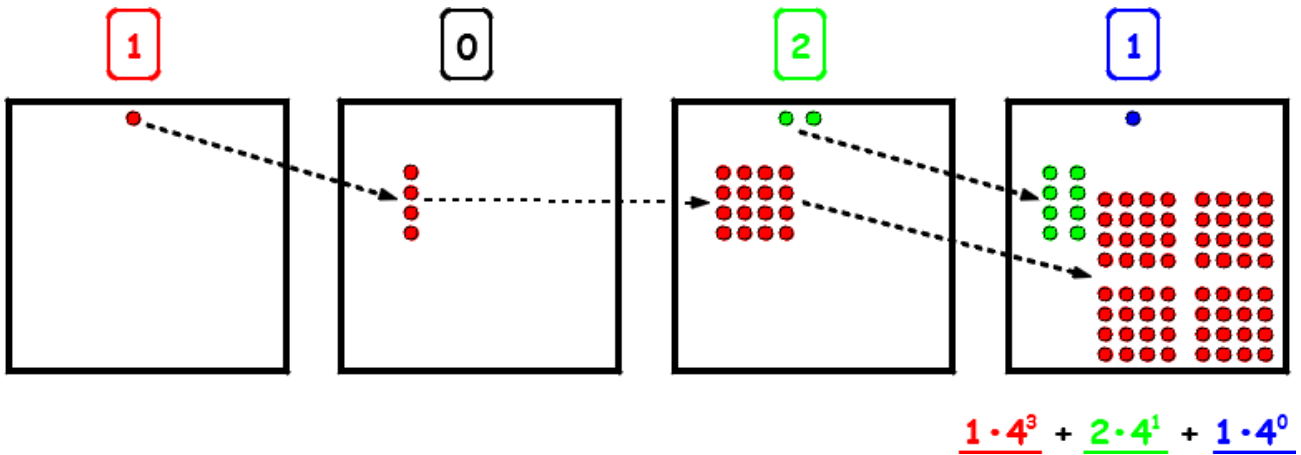
$$\begin{array}{r} 1010 \\ + 1111 \\ \hline 1111 \\ \hline 11001 \end{array}$$

3) Im Zehnersystem gilt $21 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$, was man an der Stellentafel z.B. wie in der Grafik veranschaulicht.



a) Erläutern Sie entsprechend die Zahl 1021_4 .

$$1021_4 = 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$



Durch fortgesetztes Entbündeln erhält man aus 1 Plättchen im 4. Feld $1 \cdot 4^3$ Plättchen im 1. Feld. Die 2 Plättchen im 2. Feld werden zu $2 \cdot 4^1$ Plättchen im 1. Feld entbündelt. Und 1 Plättchen lag schon im 1. Feld.

b) Allgemein: Ist $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ eine Zahl in einem Stellenwertsystem zur Basis b ($0 \leq a_i \leq b-1$), dann gilt:

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = \sum_{i=0}^n a_i \cdot b^i = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$$

c) Erklären Sie in Bezug zur Stellentafel, weshalb die k -te Stelle den Wert b^{k-1} hat. Vom k -ten bis zum 1. Feld sind genau $k-1$ Entbündelungen durchzuführen. Und bei jeder Entbündelung der Plättchen aus einem Feld in das nächst niedrigere wird die Anzahl der Plättchen b -facht ($b =$ Bündelgröße). Deshalb ergeben sich durch fortwährendes Entbündeln aus jedem Plättchen im k -ten Feld genau b^{k-1} Plättchen im ersten Feld. Das ist damit gemeint, wenn man sagt b^{k-1} sei der Stellenwert der k -ten Stelle.

4) Man kann die geometrische Reihe $3^0+3^1+3^2+3^3$ als die Zahl 1111_3 im 3er-System auffassen. Multipliziert man sie mit 2 und addiert anschließend 1, so ist das Ergebnis 10000_3 ($= 3^4$). Also ist $2 \cdot (3^0+3^1+3^2+3^3) + 1 = 3^4$ oder $3^0+3^1+3^2+3^3 = \frac{3^4-1}{2}$.

$$3^0+3^1+3^2+3^3=1111_3 \quad ; | \cdot 2$$

$$2 \cdot (3^0+3^1+3^2+3^3)=2222_3 \quad ; | +1$$

$$2 \cdot (3^0+3^1+3^2+3^3)+1 = 10000_3$$

$$= 1 \cdot 3^4$$

a) Zeigen Sie ebenso, dass $5^0+5^1+5^2+5^3 = \frac{5^4-1}{4}$, und verallgemeinern Sie diesen Gedanken

b) Verallgemeinern Sie diesen Gedanken auf geometrische Reihen $b^0+b^1+b^2+\dots+b^n$ mit einer natürlichen Zahl $b \geq 2$. Zeigen Sie also, dass $b^0+b^1+b^2+\dots+b^n = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$ ist.

$$5^0+5^1+5^2+5^3=1111_5 \quad ; | \cdot 4$$

$$4 \cdot (5^0+5^1+5^2+5^3)=4444_5 \quad ; | +1$$

$$4 \cdot (5^0+5^1+5^2+5^3)+1 = 10000_5$$

$$= 1 \cdot 5^4 \quad \text{Also ist } 4 \cdot (5^0+5^1+5^2+5^3) + 1 = 5^4 \text{ oder } 5^0+5^1+5^2+5^3 = \frac{5^4-1}{4}.$$

Allgemein:

$$b^0+b^1+b^2+\dots+b^n = 111\dots1_b \quad (n+1 \text{ Stellen}).$$

Die Multiplikation mit $b-1$ wird als wiederholte Addition berechnet:

b^n	b^{n-1}	...	b^1	b^0
1	1	...	1	1
1	1	...	1	1
...
1	1	...	1	1
$b-1$	$b-1$...	$b-1$	$b-1$

$$\begin{array}{r}
 111\dots1_b \\
 + 111\dots1_b \\
 \dots \\
 + 111\dots1_b \\
 (b-1) \cdot 111\dots1_b \\
 + 1
 \end{array}$$

1					
---	--	--	--	--	--

$$100\dots0_b \quad (= b^{n+1})$$

Also $(b-1) \cdot (b^0+b^1+b^2+\dots+b^n) + 1 = b^{n+1}$