Michael Johann

Aufgaben mit Lösungen* zur Vorlesung Arithmetik – 6

(* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

1) „Übersetzen" Sie:

$641 = 10.1000.0001_{2}$	$111\,1111_2 = 127_{10}$	$3599 = 59;59_{6\times10}$
$641 = 1201_{8}$	$111\,1111_2 = 177_{8}$	$1799 = 29;59_{6\times10}$
$641 = 281_{16}$	$111\,1111_2 = 7F_{16}$	$1;00;01_{6\times10} = 3601_{10}$
		$30;01_{6\times10} = 1801_{10}$

2) Addieren Sie (an der Stellentafel !):

2er System:
1100 + 1111 =
10 + 110 =
101 + 1010 =

8er-System:
752 + 544 =
764 + 13023 =

16er-System:
CB8 + EAF =
FF5 + 20033 =

6×10er-System:
2;53 + 3;49 =
9;57 + 1;19;03 =

2er-System:

$$\begin{array}{r} 1100 \\ +\ 1111 \\ \scriptstyle 1\,1\ \ \ \\ \hline 11011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ +\ 110 \\ \scriptstyle 1\,1\ \ \\ \hline 1000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101 \\ +\ 1010 \\ \hline 1111 \end{array}$$

8er-System:

$$\begin{array}{r} 752 \\ +\ 544 \\ \scriptstyle 1\,1\ \ \\ \hline 1516 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 764 \\ +\ 13023 \\ \scriptstyle 1\,1\ \ \\ \hline 14007 \end{array}$$

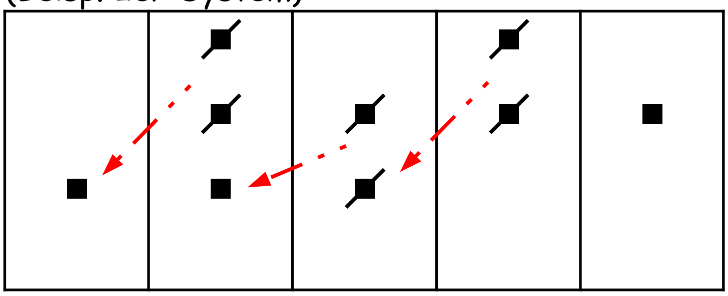
16er-System:

$$\begin{array}{r} CB8 \\ +\ EAF \\ \scriptstyle 1\,1\,1\ \\ \hline 1B67 \end{array} \qquad \begin{array}{r} FF5 \\ +\ 20033 \\ \scriptstyle 1\,1\ \ \\ \hline 21028 \end{array}$$

6×10er-System:

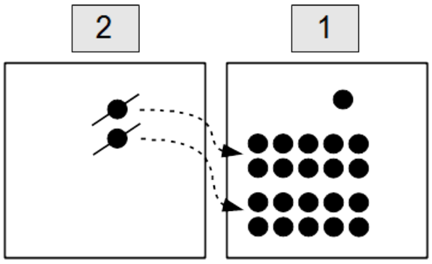
$$\begin{array}{r} 2;53 \\ +\ 3;49 \\ \scriptstyle 1\ \ \ 1\ \\ \hline 6;42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9;57 \\ +\ 1;19;03 \\ \scriptstyle 1\,1\ \ 1\ \\ \hline 1;29;00 \end{array}$$

(Beisp. 2er-System)



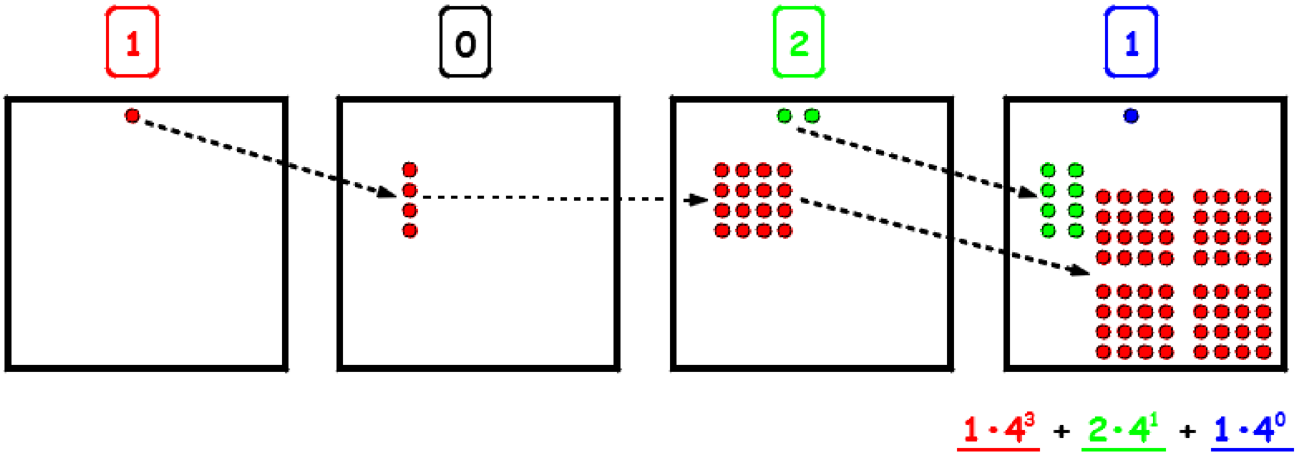
$$\begin{array}{r} 1010 \\ +\ 1111 \\ \scriptstyle 1\,1\,1\ \\ \hline 11001 \end{array}$$

3) Im Zehnersystem gilt $21 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$, was man an der Stellentafel z.B. wie in der Grafik veranschaulicht.



a) Erläutern Sie entsprechend die Zahl 1021_4.

$1021_4 = 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$



Durch fortgesetztes Entbündeln erhält man aus 1 Plättchen im 4. Feld $1 \cdot 4^3$ Plättchen im 1. Feld. Die 2 Plättchen im 2. Feld werden zu $2 \cdot 4^1$ Plättchen im 1. Feld entbündelt. Und 1 Plättchen lag schon im 1. Feld.

b) Allgemein: Ist $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ eine Zahl in einem Stellenwertsystem zur Basis *b* ($0 \leq a_i \leq b-1$), dann gilt:

$$a_n\, a_{n-1} \dots a_2\, a_1\, a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$$

c) Erklären Sie in Bezug zur Stellentafel, weshalb die k-te Stelle den Wert b^{k-1} hat.

Vom k-ten bis zum 1. Feld sind genau k-1 Entbündelungen durchzuführen. Und bei jeder Entbündelung der Plättchen aus einem Feld in das nächst niedrigere wird die Anzahl der Plättchen ver-*b*-facht (*b* = Bündelgröße). Deshalb ergeben sich durch fortwährendes Entbündeln aus jedem Plättchen im k-ten Feld genau b^{k-1} Plättchen im ersten Feld. Das ist damit gemeint, wenn man sagt b^{k-1} sei der Stellenwert der k-ten Stelle.

4) Man kann die geometrische Reihe $3^0+3^1+3^2+3^3$ als die Zahl 1111_3 im 3er-System auffassen. Multipliziert man sie mit 2 und addiert anschließend 1, so ist das Ergebnis 10000_3 ($=3^4$). Also ist $2\cdot\left(3^0+3^1+3^2+3^3\right)+1=3^4$ oder $3^0+3^1+3^2+3^3=\dfrac{3^4-1}{2}$.

$$3^0+3^1+3^2+3^3=1111_3 \quad ;|\cdot 2$$
$$2\cdot(3^0+3^1+3^2+3^3)=2222_3 \quad ;|+1$$
$$2\cdot(3^0+3^1+3^2+3^3)+1=10000_3$$
$$=1\cdot 3^4$$

a) Zeigen Sie ebenso, dass $5^0+5^1+5^2+5^3=\dfrac{5^4-1}{4}$, und verallgemeinern Sie diesen Gedanken

b) Verallgemeinern Sie diesen Gedanken auf geometrische Reihen $b^0+b^1+b^2+...+b^n$ mit einer natürliche Zahl $b\geq 2$. Zeigen Sie also, dass $b^0+b^1+b^2+...+b^n=\dfrac{b^{n+1}-1}{b-1}$ ist.

$$5^0+5^1+5^2+5^3=1111_5 \quad ;|\cdot 4$$
$$4\cdot(5^0+5^1+5^2+5^3)=4444_5 \quad ;|+1$$
$$4\cdot(5^0+5^1+5^2+5^3)+1=10000_5$$
$$=1\cdot 5^4$$

Also ist $4\cdot\left(5^0+5^1+5^2+5^3\right)+1=5^4$ oder $5^0+5^1+5^2+5^3=\dfrac{5^4-1}{4}$.

Allgemein:

$b^0+b^1+b^2+...+b^n=111...1_b$ (n+1 Stellen).

Die Multiplikation mit $b-1$ wird als wiederholte Addition berechnet:

	b^n	b^{n-1}	...	b^1	b^0	
	1	1	...	1	1	$111...1_b$
	1	1	...	1	1	$+\ 111...1_b$
	...	...	...	...	...	...
	1	1	...	1	1	$+\ 111...1_b$
	$b-1$	$b-1$	...	$b-1$	$b-1$	$(b-1)\cdot 111...1_b$
					1	$+1$
1						$100...0_b\ (=b^{n+1})$

Also $(b-1)\cdot\left(b^0+b^1+b^2+...+b^n\right)+1=b^{n+1}$