Michael Johann

Aufgaben mit Lösungen* zur Vorlesung Arithmetik – 7

(* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

1) Berechnen Sie die Differenz der angegebenen Zahlen durch Addition der größeren Zahl zum Komplement der kleineren (schriftlich).

2er System:

1010 + **101** = 1111

10 + **101** = 111

110 + **10011** = 11001

8er-System:

461 + **272** = 753

775 + **20014** = 21011

4567 + **5556** = 12345

16er-System:

AC9 + **2E6** = DAF

FF7 + **F02B** = 10022

6×10er-System:

1;42 + **0;56** = 2;38

9;57 + **1;09;06** = 1;19;03

2er-System:

C(1010)=0101   C(10)=01   C(110)=001

```
   1111       111      11001
+  0101    +   01    +   001
   1111       111          1
  10100      1000      11010
 -10000    -  100    -  1000
+     1    +    1    +     1
    101       101      10011
```

8er-System:

C(461)=316   C(775)=002   C(4567)=3210

```
   753       21011       12345
+  316    +    002    +   3210
  1  1
  1271       21013       15555
 -1000       -1000      -10000
+    1    +      1    +      1
   272       20014        5556
```

16er-System:

C(AC9)=536   C(FF7)=008

```
   DAF       10022
+  536    +    008
  1  1
  12E5       1002A
- 1000    -   1000
+    1    +      1
   2E6        F02B
```

6×10er-System:

C(1;42)=8;17   C(9;57)=0;02

```
    2;38       1;19;03
+   8;17    +     0;02
   1   1
   10;55       1;19;05
-  10;00    -    10;00
+      1    +        1
    0;56       1;09;06
```

2a) In welchen Stellenwertsystemen mit Basis b ist 11_b eine gerade Zahl?

In allen Stellenwertsystem mit ungerader Basis ist 11_b eine gerade Zahl.

Begründung an der Stellentafel: Entbündelt man das Plättchen im linken Feld, so kommen b Plättchen ins Einer-Feld dazu, so dass dort $1+b$ Plättchen liegen. $1+b$ ist genau dann gerade, wenn b ungerade ist.

b) Auch für diese Stellenwertsysteme gibt es ein einfaches Kriterium zur Unterscheidung von geraden und ungeraden Zahlen:

Eine Zahl in einem Stellenwertsystem mit **ungerader** Basis b ist genau dann gerade, wenn sie eine **gerade** Anzahl **ungerader** Ziffern hat, – also wenn ihre Quersumme **gerade** ist.

Begründung: Es sei $z_n\, z_{n-1} \ldots z_1\, z_0$ eine Zahl in einem Stellenwertsystem mit **ungerader**

Basis *b*. Entbündelt man diese Zahl an der Stellentafel vollständig ins erste Feld, dann liegen dort $z_n \cdot b^n + z_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + z_1 \cdot b^1 + z_0 \cdot b^0$ Plättchen (d.i. der *Zahlenwert*). Diese Summe ist genau dann gerade, wenn die Anzahl der **ungeraden** Summanden **gerade** ist. Und weil jeder Summand $z_i \cdot b^i$ genau dann **gerade** ist, wenn dies auch für z_i gilt (die Potenzen von b sind alle **ungerade**), ist der Zahlenwert genau dann gerade, wenn die Anzahl der **ungeraden** Ziffern **gerade** ist.

3a) Bestimmen Sie, wie viele Endnullen die Zahl 25! (=1·2·3·…·25) im Zehnersystem hat.
(Tipp: Wie oft kommen 2 und 5 in der Primfaktorzerlegung dieses Produkts vor?)

5 kommt insgesamt 6-mal vor: je einmal in 5, 10, 15, 20 und zweimal in 25.
Zu jeder 5 gibt es (mindestens) eine 2, so dass der Faktor 10 insgesamt 6-mal vorkommt und 25! im Zehnersystem 6 Endnullen hat.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Endnullen von $10_{16}!$ im 16er-Sytem. ($10_{16}! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot E \cdot F \cdot 10_{16}$)

2 kommt insgesamt 15-mal in der Primfaktorzerlegung vor:
2, 2·2, 2·3, 2·2·2, 2·5, 2·2·3, 2·7, 2·2·2·2
Also kommt der Faktor 10_{16} (=2·2·2·2=16) insgesamt 3-mal vor, und $10_{16}!$ hat somit 3 Endnullen.

4a) Berechnen Sie folgende Produkte unter Verwendung des 10-fachen (bzw. 1;00-fachen) der jeweiligen Zahl (bitte Rechnung angeben).
Hinweis: Im 6×10er-System hat der Faktor 1;00 die gleiche Wirkung wie 100 im Zehner-system, so ist z.B. 1;00 × 2;49 = 2;49;00.

2er System:

11 × 110 = **10010**
(1100 + 110)

101 × 110 = **11110**
(11000 + 110)

8er-System:

12 × 342 = **4324**
(3420 + 342 + 342)

21 × 342 = **7402**
(3420 + 3420 + 342)

16er-System:

12 × AFE = **C5DC**
(AFE0 + AFE + AFE)

21 × AFE = **16ABE**
(AFE0 + AFE0 + AFE)

6×10er-System:

1;01 × 1;10 = **1;11;10**
(1;10;00 + 1;10)

2;02 × 2;20 = **4;44;40**
(2;20;00 + 2;20;00 + 2;20 + 2;20)

b) Vervollständigen und begründen Sie folgende Produktgleichungen:

8er-System: $\frac{1}{2}$ von 1230 = __4__ × 123 = $\frac{1}{2}$ von 10 × 123,

16er-System: $\frac{1}{2}$ von 1230 = __8__ × 123 = $\frac{1}{2}$ von 10 × 123,

$\frac{1}{2}$ von 12300 = __80__ × 123 = $\frac{1}{2}$ von 100 × 123

6×10er-System: $\frac{1}{2}$ von 1;23;00 = __30__ × 1;23 = $\frac{1}{2}$ von 1;00 × 1;23