Michael Johann

Aufgaben mit Lösungen* zur Vorlesung Arithmetik – 9

(* Keine Musterlösungen, da nicht immer vollständig und auch nicht frei von Flüchtigkeitsfehlern.)

1) Berechnen Sie folgende Divisionsaufgaben im 16er-System im Sinne des Aufteilens:

a_1) 42F ÷ B2 a_2) 42F1 ÷ B2 a_3) 42F10 ÷ B2

```
42F -   B2 = 37D  (1× B2)
37D - 164 = 219   (2× B2)
219 - 216 =   3   (3× B2)
                   6× B2
→ 42F ÷ B2 = 6 Rest 3
```

```
42F1 - 42C0 = 31  (60× B2)
→ 42F1 ÷ B2 = 60 Rest 31
```

```
42F10 - 42C00 = 310  (600× B2)
  310 -   216 =  FA  (  3× B2)
   FA -    B2 =  48  (  1× B2)
                      604× B2
→ 42F10 ÷ B2 = 604 Rest 48
```

b) 4B3E90 ÷ 64 = C0A0 R 10

```
   4B3E90
-  320000 (8000× 64)
   193E90
-  190000 (4000× 64)
     3E90
-    3200 (  80× 64)
      C90
-     C80 (  20× 64)
       10  C0A0× 64
```

c) A05A ÷ A = 1009

```
  A05A
- A000 (1000× A)
    5A
-   50 (   8× A)
     A
-    A (   1× A)
     0  1009× A
```

2a) An einer Stellentafel liegt nach dem Ausführen einer Division (im Zehnersystem) dreimal die Zahl 421. Wie lautet die zugehörige Aufgabe im Sinne des Aufteilens bzw. Verteilens?

	o o o o	o o	o
	o o o o	o o	o
	o o o o	o o	o

Den Dividend erhält man durch Addition (und Bündelung) der Zahlen an der Stellentafel:
3 × 421 = 1263

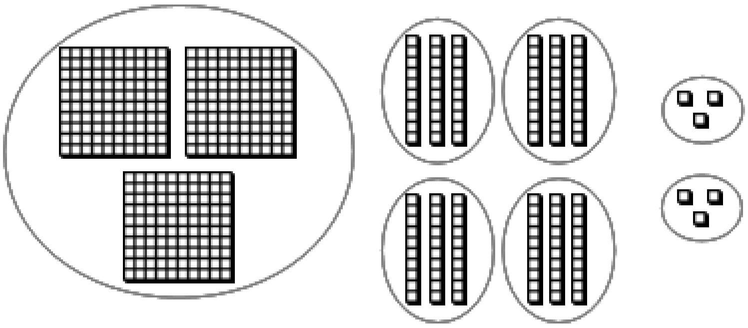
Bei der Berechnung von 1263/3 durch **Verteilen** erhält man dreimal 421:

```
 421
 421
 421
1263/3
-12
  06
 - 6
   03
  - 3
    0
```

Bei der Berechnung von 1263÷421 durch **Aufteilen** erhält man an der Stellentafel ebenfalls dreimal 421, indem man 3-mal nacheinander 421 subtrahiert und den Subtrahend jeweils an der Stellentafel liegen lässt:

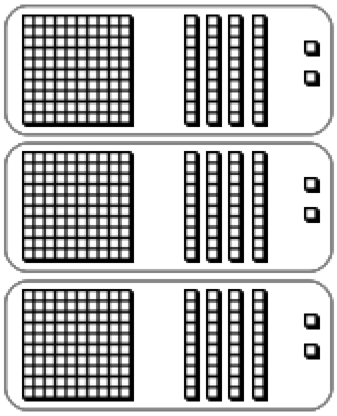
```
1263-421= 842
 842-421= 421
 421-421=   0
```

b) Im Folgenden ist das Ergebnis einer Divisionen mit Mehrsystemblöcken (Dienes-Bündelmaterial) bildlich dargestellt. Wie lautet die ursprüngliche Aufgabe, und wie sah der Dividend mit Bündelmaterial aus? Finden Sie heraus, in welchem Fall ver- bzw. aufgeteilt wurde.

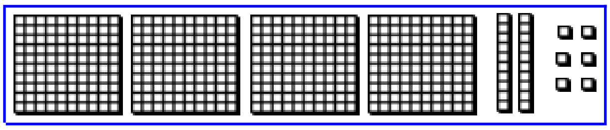


Aufteilen

426 : 3



Verteilen



3) Im Zehnersystem ist 1/7 ein unendlicher Systembruch mit einer Periodenlänge von 6 Ziffern. Das ist nicht in jedem Stellenwertsystem so!

a) Berechnen Sie dazu die Systembrüche von 1/7 im 2er-, 3er-, …, 8er-System und stellen Sie aufgrund der Ergebnisse eine Vermutung auf, welche Periodenlängen i.Allg. vorkommen und welche nicht.

b) Testen Sie Ihre Vermutung an 1/13 (im 2er-, 3er- und 4er-System).

c) 1/21 = $0,\overline{047619}$ hat die Periodenlänge 6. Weshalb muss das kein Widerspruch zur obigen Vermutung sein?

<u>2er-System:</u>

1/7= 0 R 1 (Einerstelle)
2/7= 0 R 2 (1. Nachkommastelle)
4/7= 0 R 4 (2. Nachkommastelle)
8/7= 1 R 1 (3. Nachkommastelle)

1/7= $0,\overline{001}$

<u>3er-System:</u>

1/7= 0 R 1
3/7= 0 R 3
9/7= 1 R 2
6/7= 0 R 6
18/7= 2 R 4
12/7= 1 R 5
15/7= 2 R 1

1/7= $0,\overline{010212}$

<u>4er-System:</u>

1/7= 0 R 1
4/7= 0 R 4
16/7= 2 R 2
8/7= 1 R 1

1/7= $0,\overline{021}$

<u>5er-System:</u>

1/7= 0 R 1
5/7= 0 R 5
25/7= 3 R 4
20/7= 2 R 6
30/7= 4 R 2
10/7= 1 R 3
15/7= 2 R 1

1/7= $0,\overline{032412}$

<u>6er-System:</u>

1/7= 0 R 1
6/7= 0 R 6
36/7= 5 R 1

1/7= $0,\overline{05}$

<u>7er-System:</u>

1/7= 0 R 1
7/7= 1 R 0

1/7= 0,1

<u>8er-System:</u>

1/7= 0 R 1
8/7= 1 R 1

1/7= $0,\overline{1}$

Die maximale Periodenlänge ist 6 (= Divisor – 1), und jede Periodenlänge in einem beliebigen Stellenwertsystem ist ein Teiler dieser maximalen Länge.

b) 1/13 = $0,\overline{076923}$ = $0,\overline{000100111011}_2$ = $0,\overline{002}_3$ = $0,\overline{010323}_4$ = $0,\overline{0143}_5$ = $0,\overline{024340531215}_6$

c) 7 und 13 sind Primzahlen, 21 hingegen nicht.

4) Es sei $0{,}a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m}$ ein Systembruch mit dem periodischen Anteil $b_1b_2\ldots b_m$ in einem beliebigen Stellenwertsystem (z.B. $0{,}12\overline{345} = 0{,}12345345345\ldots$ im Zehnersystem). Geben Sie eine Divisionsaufgabe an, die diesen Systembruch zum Ergebnis hat, und begründen Sie Ihre Antwort. Tipp: Berechnen Sie zunächst das Beispiel $0{,}12\overline{345} = 12{,}\overline{345}\,/100 = (12 + 0{,}\overline{345})/100 = \ldots$ und verallgemeinern Sie dann Ihr Vorgehen.

$$0{,}12\overline{345} = 12{,}\overline{345}\,/100 = (12 + 0{,}\overline{345})/100 = \left(12+\frac{345}{999}\right)/100 = \frac{12\cdot 999+345}{999\cdot 100} = \frac{12333}{99900}$$

allgemein:

$$0{,}a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m} = (a_1a_2\ldots a_n + 0{,}\overline{b_1b_2\ldots b_m})/10^n$$

$$= \left(a_1a_2\ldots a_n + \frac{b_1b_2\ldots b_m}{10^m-1}\right)/10^n = \frac{a_1a_2\ldots a_n\cdot\left(10^m-1\right) + b_1b_2\ldots b_m}{\left(10^m-1\right)\cdot 10^n}$$

Oder:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I)} & 100.000\cdot 0{,}12\overline{345} & = & 12.345{,}\overline{345} \\
\text{II)} & 100\cdot 0{,}12\overline{345} & = & 12{,}\overline{345} \\
\hline
\text{I-II)} & 99.900\cdot 0{,}12\overline{345} & = & 12.333
\end{array}$$

$\rightarrow 0{,}12\overline{345} = 12.333/99.900$

allgemein:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I)} & 10^{n+m}\cdot 0{,}a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m} & = & a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m{,}\overline{b_1b_2\ldots b_m} \\
\text{II)} & 10^{n}\cdot 0{,}a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m} & = & a_1a_2\ldots a_n{,}\overline{b_1b_2\ldots b_m} \\
\hline
\text{I-II)} & (10^{n+m} - 10^n)\cdot 0{,}a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m} & = & a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m - a_1a_2\ldots a_n
\end{array}$$

$$\rightarrow 0{,}a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m} = \frac{a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m - a_1a_2\ldots a_n}{10^{n+m}-10^n}$$