

## 4. Übungsblatt zur Vorlesung Geometrie, WS 2018/19

1) Die von der Schule her bekannte Achsenspiegelung ist eine **Kongruenzabbildung**, da das Spiegelbild einer Figur zu dieser kongruent ist. Wird nacheinander an mehreren Geraden gespiegelt, dann ist die resultierende Figur folglich immer noch kongruent zur Ausgangsfigur. Zeigen Sie:

- a) Spiegelt man nacheinander an zwei Geraden,
  - i) die parallel sind, dann entspricht dies einer Verschiebung der Figur um den doppelten Abstand der beiden Geraden.
  - ii) die sich schneiden, dann entspricht diese einer Drehung der Figur um das doppelte des Winkels, den die Geraden bilden; das Drehzentrum ist der Schnittpunkt der Geraden.
- b) Spiegelt man nacheinander an drei Geraden,
  - i) die sich in einem Punkt schneiden, dann entspricht dies einer Spiegelung der Figur an einer weiteren Geraden durch den Schnittpunkt der anderen.
  - ii) die alle zueinander parallel sind, dann entspricht dies einer Spiegelung der Figur an einer weiteren Geraden, die zu den anderen parallel ist.
  - iii) von denen die dritte senkrecht zu den anderen steht, dann entspricht dies einer Verschiebung mit anschließender Spiegelung der Figur, also einer Gleit- oder Schubspiegelung.

2) Auf der folgenden Seite finden Sie einen Beweis des **Strahlensatzes** bei dem die Parallelen auf derselben Seite bezüglich des Schnittpunkts liegen. Zeigen Sie, dass die Aussage auch zutrifft, wenn die Parallelen auf unterschiedlichen Seiten liegen, dass also auch hier gilt:

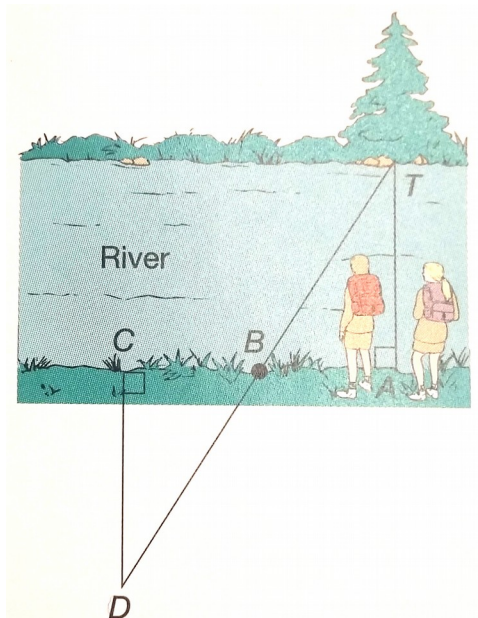
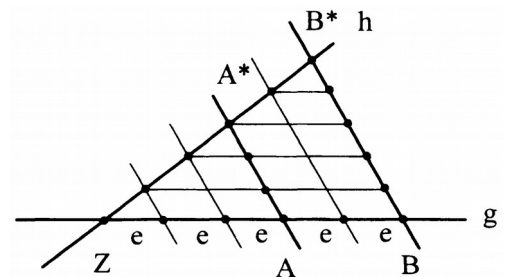
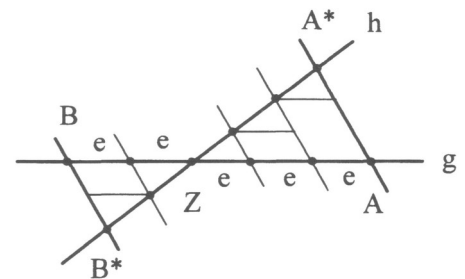
$$|ZA| : |ZB| = |ZA^*| : |ZB^*|$$

3) Die von  $ZB^*$  ausgehenden und zu  $g$  parallelen Einheitsstrecken werden so verlängert, dass sie die Strecke  $BB^*$  treffen. Welche Strecken sind jeweils gleich lang? Begründen Sie Ihre Antwort. Zeigen Sie, dass

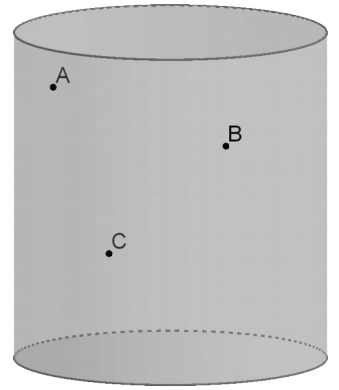
$$|ZA| : |ZB| = |AA^*| : |BB^*|.$$

4) Zwei Wanderer, Ken und Betty, stehen an einem Fluss bei Punkt A; direkt gegenüber, auf der anderen Seite des Flusses befindet sich ein Baum (T). Betty geht ein Stück am Flussufer entlang und bleibt bei einem Punkt B stehen. Ken geht ebenfalls zu Punkt B und dann noch einmal so weit bis zu Punkt C. Dort dreht er sich um  $90^\circ$  vom Fluss weg und geht so lange, bis er Betty und den Baum in einer Linie sieht (D).

- a) Bestimmen Sie kongruente Strecken- und Winkelpaare.
- b) Ist  $\triangle ABT \cong \triangle CBD$ ? Warum bzw. warum nicht?
- c) Wie lässt sich so die Breite des Flusses bestimmen?



- 5) Auf einem Zylindermantel seien drei Punkte gegeben.
- Verbinden Sie diese Punkte auf (mind. zwei) unterschiedliche Weisen zu Dreiecken, und überprüfen Sie jeweils die Winkelsumme.
  - Skizzieren Sie ein „Zwei-Eck“ auf dem Zylindermantel.
  - Welche Axiome der gewöhnlichen ebenen Geometrie gelten auf dem Zylindermantel nicht?



### Strahlensätze

Die Geraden, die durch einen Punkt  $Z$  gehen, bilden ein **Geradenbüschel** mit Zentrum  $Z$ .  $g$  und  $h$  seien zwei Geraden eines solchen Büschels. Diese beiden Geraden werden von zwei zueinander parallelen Geraden  $AA^*$  und  $BB^*$  geschnitten (Fig. 4.1.1). Wir nehmen zunächst an, dass  $\overline{ZA}$  und  $\overline{ZB}$  Vielfache einer Einheitsstrecke  $e$  sind. Dann gilt mit zwei natürlichen Zahlen  $m$  und  $n$  für diese Strecken  $\overline{ZA} = m \cdot e$  und  $\overline{ZB} = n \cdot e$ .

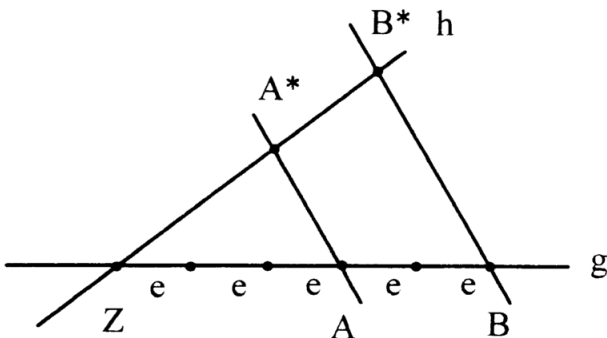


Fig. 4.1.1

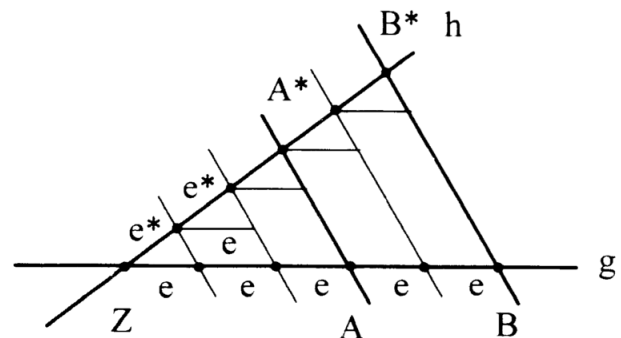


Fig. 4.1.2

In Figur 4.1.1 ist  $m = 3$  und  $n = 5$ . Wir ergänzen die Figur durch Parallelen zu  $AA^*$  durch die Endpunkte der Einheitsstrecken auf  $g$ . In den Schnittpunkten mit  $ZB^*$  werden parallel zu  $g$  Einheitsstrecken abgetragen (Fig. 4.1.2). Nach Kongruenzsatz WSW sind alle an  $\overline{ZB^*}$  anliegenden Hilfsdreiecke kongruent. Die Parallelen zu  $AA^*$  zerlegen damit die Strecke  $\overline{ZB^*}$  in  $n$  gleich lange Strecken  $e^*$ . Insgesamt ergeben sich die Streckenverhältnisse:

$$|ZA| : |ZB| = m : n \qquad |ZA^*| : |ZB^*| = m : n$$

und daraus folgt

$$|ZA| : |ZB| = |ZA^*| : |ZB^*|$$