

5. Übungsblatt zur Vorlesung Geometrie, WS 2018/19

Pentagon und Pentagramm

Das Pentagramm war das (geheime) Ordenssymbol der Pythagoreer. Als das Ordensmitglied Hippasos von Metapont herausfand, dass sich das Teilungsverhältnis der Seiten des Pentagramms **nicht** mit ganzen Zahlen ausdrücken lässt, löste er damit eine Krise der noch jungen Wissenschaft Mathematik aus. Der Legende nach wurde er dafür von den Göttern bei einem Schiffbruch mit dem Tod bestraft; er ertrank.

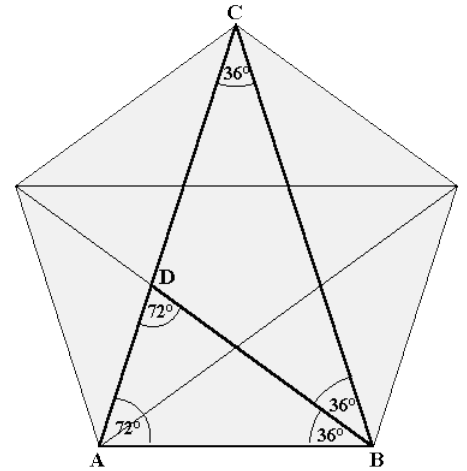
1a) Leiten Sie die in der Abbildung angegebenen Winkel her.

(Zeigen Sie zunächst mithilfe des Kreiswinkelsatzes, dass jeder Innenwinkel des Fünfecks durch die Diagonalen in drei gleich große Winkel von je 36° geteilt wird.)

b) Es sei $s=AB$ die Seitenlänge des Fünfecks und $d=AC$ die Länge der Diagonale. Zeigen Sie, dass damit gilt: $\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$. Dieses

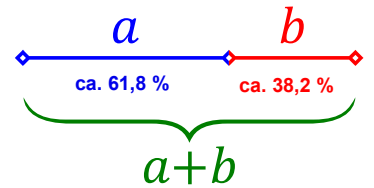
Verhältnis heißt *goldener Schnitt*.

(Zeigen Sie zunächst, dass die Dreiecke ABC und DAB ähnlich sind.)



Goldener Schnitt: Eine Strecke wird im goldenen Schnitt geteilt, wenn

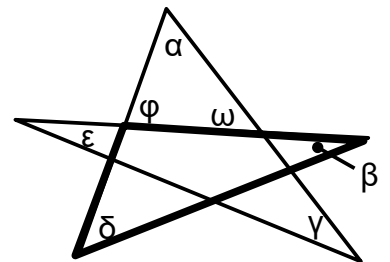
für die beiden Teilstrecken a und b (mit $a > b$) gilt: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.



Es folgt daraus $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($= \Phi$)

2) Zeigen Sie: Die Summe $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon$ der Winkel in den Eckpunkten eines beliebigen sternförmigen Fünfecks ist 180° .

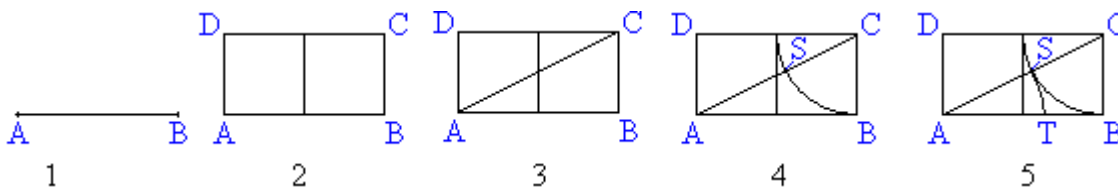
(Zeigen Sie zunächst, dass jeder Außenwinkel an einem Dreieck so groß ist wie die beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Drücken Sie dann die Winkel φ und ω mithilfe der anderen Winkel aus.)



3) In der angegebenen Bildfolge wird ein Teilungspunkt T einer Strecke AB konstruiert.

a) Geben Sie eine Beschreibung der Konstruktion für GeoGebra an (Ausdruck beifügen).

b) Zeigen Sie, dass T die Strecke AB im goldenen Schnitt teilt.

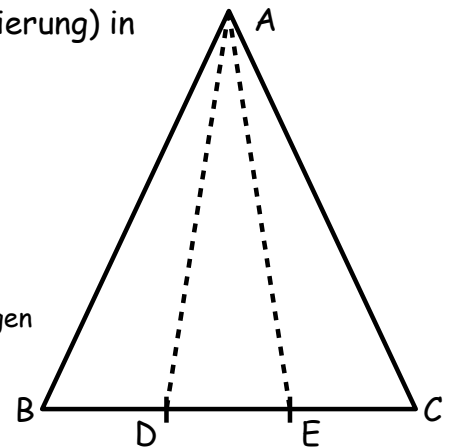


Dreiteilung eines Winkel

Erst im 19. Jhd. konnte bewiesen werden, dass es nicht möglich ist, beliebige Winkel allein mit Zirkel und Lineal (ohne Skala oder sonstige Markierung) in drei gleiche große Teilwinkel zu zerlegen.

- 4) Eine spontane Idee, Winkel zu dritteln, indem man im gleichschenkligen Dreieck die Grundseite drittelt und damit den gegenüberliegenden Winkel - ist falsch!

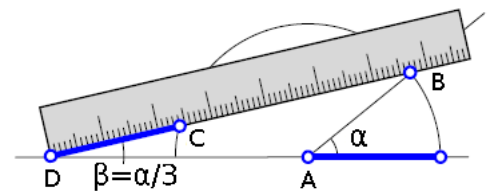
(Tipp: Nehmen Sie an, man könnte Winkel doch auf diese Weise dritteln. Zeigen Sie, dass dann z.B. $\triangle ADC$ (s. Abb.) ein gleichschenkliges Dreieck sein müsste, und führen Sie das zu einem Widerspruch.)



- 5) Informieren Sie sich über die Methode des Archimedes zur Winkeldreiteilung (z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels).

- a) Geben Sie eine Beschreibung der Konstruktion für GeoGebra an (Ausdruck beifügen).

- b) Begründen Sie die Korrektheit der Konstruktion. (Betrachten Sie die Dreiecke DAC und BCA.)



Zum Probieren:

Ein **Möbiusband** ist leicht herzustellen, indem man einen längeren Streifen Papier mit beiden Enden ringförmig zusammenklebt, ein Ende aber vor dem Zusammenkleben um 180° verdreht.

Zeichnen Sie auf einer Seite des Bandes eine Mittellinie in Längsrichtung. Was stellen Sie fest? Schneiden Sie das Band entlang dieser Mittellinie auseinander. Was stellen Sie jetzt fest. Was passiert, wenn Sie diesen Vorgang wiederholen? Versuchen Sie, das Band zu dritteln!

