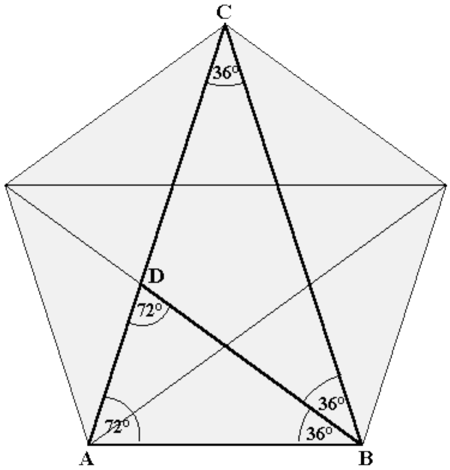
Michael Johann

5. Übungsblatt zur Vorlesung Geometrie, WS 2019/20

Pentagon und Pentagramm

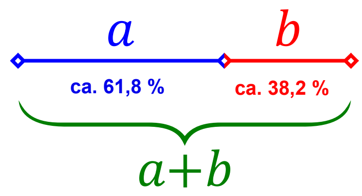
Das Pentagramm war das (geheime) Ordenssymbol der Pythagoreer. Als das Ordensmitglied Hippasos von Metapont herausfand, dass sich das Teilungsverhältnis der Seiten des Pentagramms **nicht** mit ganzen Zahlen ausdrücken lässt, löste er damit eine Krise der noch jungen Wissenschaft Mathematik aus. Der Legende nach wurde er dafür von den Göttern bei einem Schiffbruch mit dem Tod bestraft; er ertrank.



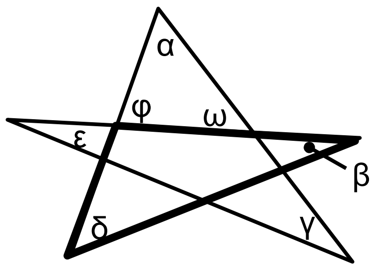
1a) Leiten Sie die in der Abbildung angegebenen Winkel her.
(Zeigen Sie zunächst mithilfe des Kreiswinkelsatzes, dass jeder Innenwinkel des Fünfecks durch die Diagonalen in drei gleich große Winkel von je 36° geteilt wird.)

b) Es sei s=AB die Seitenlänge des Fünfecks und d=AC die Länge der Diagonale. Zeigen Sie, dass damit gilt: $\frac{d}{s}=\frac{s}{d-s}$. Dieses Verhältnis heißt *goldener Schnitt.*
(Zeigen Sie zunächst, dass die Dreiecke ABC und DAB ähnlich sind.)

Goldener Schnitt: Eine Strecke wird im goldenen Schnitt geteilt, wenn für die beiden Teilstrecken a und b (mit a > b) gilt: $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$.

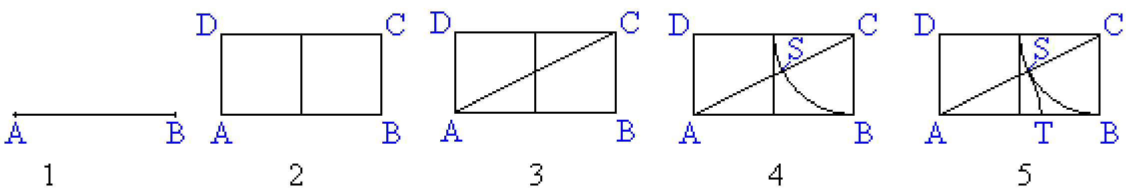


Es folgt daraus $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \ (=\Phi)$

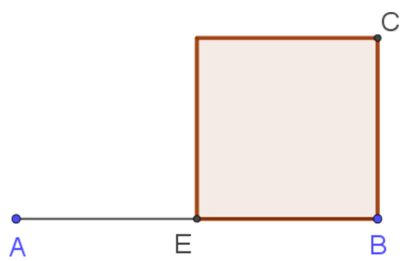


2) Zeigen Sie: Die Summe α+β+γ+δ+ε der Winkel in den Eckpunkten eines beliebigen sternförmigen Fünfecks ist 180°.
(Zeigen Sie zunächst, dass jeder Außenwinkel an einem Dreieck so groß ist wie die beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Drücken Sie dann die Winkel φ und ω mithilfe der anderen Winkel aus.)

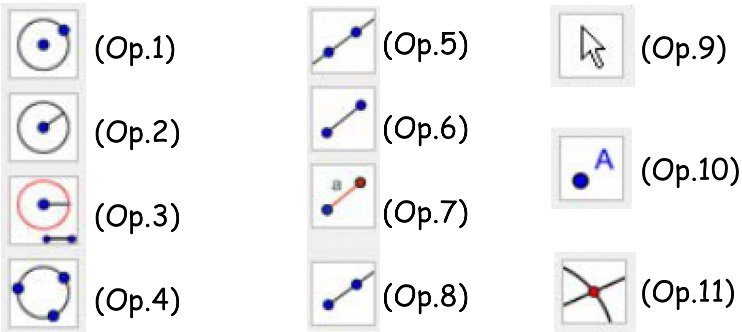
3) In der angegebenen Bildfolge wird ein Teilungspunkt T einer Strecke AB konstruiert.



a) Vervollständigen Sie die angegebene Konstruktionsbeschreibung, die auf GeoGebra beruht, und nummerieren Sie die Konstruktionsschritte in der richtigen Reihenfolge.
Vorgegeben sei die Strecke AB und das rechte Quadrat.



Nr.	Operation	Operand(en)	Kommentar
		Wähle ___ und ___.	= d
		Wähle ___ und ___.	= S
		Wähle Mittelpunkt ___, Punkt auf dem Kreis ___.	= k_1
		Wähle ___ und ___.	= T
		Wähle Mittelpunkt ___, Punkt auf dem Kreis ___.	= k_2



b) T teilt die Strecke AB im goldenen Schnitt.
Zeigen Sie zuerst, dass $|[AC]| = \sqrt{5} \cdot |[BC]|$ ist:

$|[AC]|^2 = \ldots.$

und vervollständigen Sie dann die folgende Rechnung:

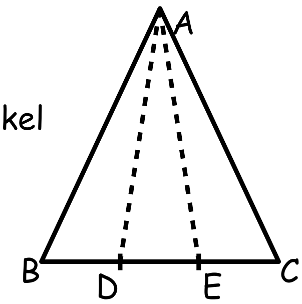
$$\frac{AB}{AT} = \frac{AB}{(?)_1} = \frac{AB}{AC-(?)_2} = \frac{2\cdot(?)_3}{\sqrt{5}\cdot BC-(?)_4} = \frac{2\cdot(?)_5}{(?)_6\cdot(\sqrt{5}-(?)_7)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

Zeigen Sie schließlich: $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} =$$

Dreiteilung eines Winkel

Erst im 19. Jhd. konnte bewiesen werden, dass es nicht möglich ist, beliebige Winkel allein mit Zirkel und Lineal (ohne Skala oder sonstige Markierung) in drei gleiche große Teilwinkel zu zerlegen.

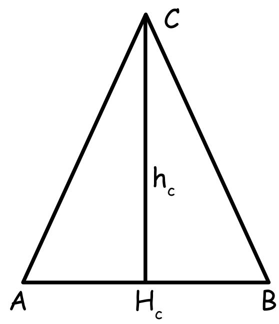


4a) Eine spontane Idee, Winkel zu dritteln, indem man im gleichschenkligen Dreieck die Grundseite drittelt und damit den gegenüberliegenden Winkel – ist falsch!
Die Beweisschritte in der Tabelle ergeben in der richtigen Reihenfolge einen Beweis durch Widerspruch. Nummerieren Sie richtig durch und füllen Sie die Lücken aus. Überflüssige Zeilen übergehen Sie.

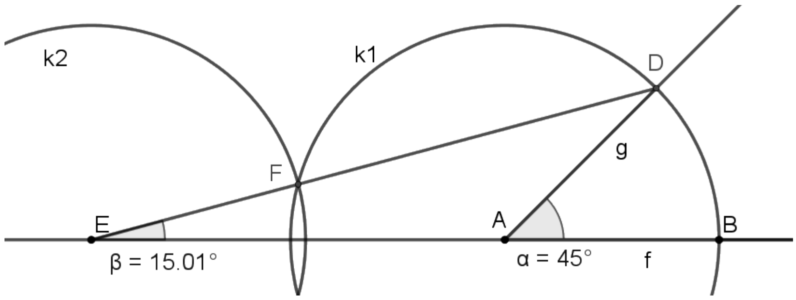
Nr.	Beweisschritt
	Gegeben sei das Dreieck $\triangle ABC$ und die Punkte D und E, die [BC] dritteln.
	Das Dreieck $\triangle ABC$ ist Teil eines Parallelogramms $\square ABA'C$ mit Diagonale [BC].
	Da sich in jedem Parallelogramm die Diagonalen ____________ und da E der Mittelpunkt von [DC] ist, geht auch _____ durch E.
	Das Dreieck $\triangle DCA$ ist Teil eines Parallelogramms $\square ADA'C$ mit Diagonale [DC].
	Also ist das Dreieck $\triangle AA'C$ ______________, weil seine Winkel bei A und A' ______________ sind.
	Wenn die Winkel $\angle BAD$, $\angle$_____ und $\angle$_____ gleich groß sind, dann halbiert [AA'] in $\square ADA'C$ die Winkel bei A und A'.
	Also ist D Mittelpunkt der Strecke _____ und nicht Mittelpunkt der Strecke _____.
	Also liegt D auf einem Kreisbogen um A durch B und C und nicht auf der Geraden ____.
	Damit ist $[AC] \cong [A'C]$ und wegen $[A'C] \cong$ ____ gilt auch ___________, womit $\triangle ADC$ ein gleichschenkliges Dreieck ist.

4b) Wenn in einem Dreieck zwei Winkel kongruent sind, dann ist es gleichschenklig.

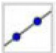
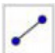
Nr.	Beweisschritt
	$\triangle ABC$ sei ein gleichschenkliges Dreieck mit $[AC] \cong [BC]$.
	$\triangle ABC$ sei ein Dreieck mit kongruenten Winkeln bei A und B.
	Mit dem Kongruenzsatz _____ und der gemeinsamen Seite ___ folgt: $\triangle AH_cC \cong \triangle BH_cC$. und damit $[AC] \cong [BC]$.
	Da $\triangle AH_cC$ und $\triangle BH_cC$ in zwei Winkeln übereinstimmen, stimmen sie auch im dritten Winkel, nämlich bei ____, überein.
	Die Höhe h_c teilt das Dreieck in zwei Teildreiecke $\triangle AH_cC$ und $\triangle BH_cC$ mit rechten Winkeln bei H_c.
	Da $\triangle ABC$ spiegelsymmetrisch bezüglich h_c ist, gilt $\angle A \cong \angle B$.

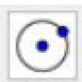
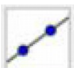


5) Informieren Sie sich über die Methode des Archimedes zur Winkeldreiteilung (z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels).



a) Vervollständigen Sie die angegebene Konstruktionsbeschreibung, die auf GeoGebra beruht.
Vorgegeben sei ein Winkel mit Schenkeln f und g und Scheitelpunkt A.

Operation	Operand(en)	Kommentar
	Wähle Mittelpunkt ___ und einen Punkt B auf ___	= k_1
	Wähle k_1 und g	= D
	Wähle A und B	= h
	Wähle als Radius __, B und als Mittelpunkt __ auf h (nicht auf f)	= k_2
	Wähle __ und __	= i
	Wähle ___ und __	= F
	Verschiebe ___ auf ___ so, dass ___ auf ___ liegt	

 (Op.1)  (Op.5)  (Op.9)

 (Op.2)  (Op.6)

 (Op.10)

 (Op.3)  (Op.7)

 (Op.4)  (Op.8)  (Op.11)

b) Begründen Sie die Korrektheit der Konstruktion; zeigen Sie also: $\alpha = 3\beta$.
(Betrachten Sie die Dreiecke EAF und DFA.)