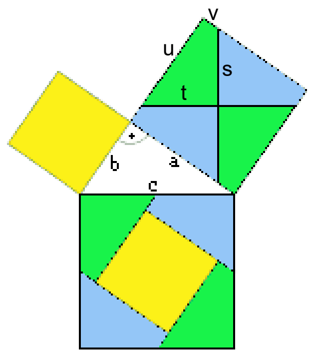
Michael Johann

6. Übungsblatt zur Vorlesung Geometrie, WS 2019/20
- Keine Abgabe, aber relevant für die Klausur -

1) Im Folgenden ist der Zerlegungsbeweis von Henry Perigal für den Satz des Pythagoras wiedergegeben (Henry Perigal, „Geometric Dissections and Transpositions", London, 1891).

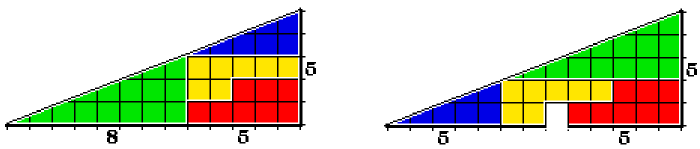
- Markieren Sie den Mittelpunkt des größeren Kathetenquadrates. Zeichnen Sie durch den Mittelpunkt jeweils senkrecht und waagrecht eine Parallele zu den Seiten des Hypotenusenquadrats.
- Das größere Kathetenquadrat lässt sich entlang dieser Linien zerlegen und zusammen mit dem kleineren Kathetenquadrat zum Hypotenusenquadrat zusammensetzen.



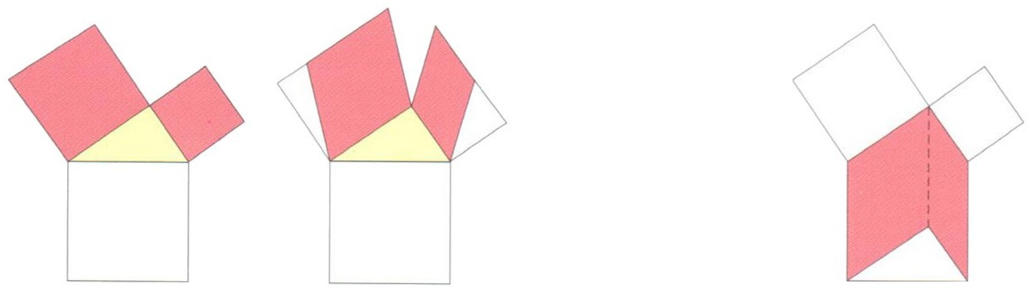
a) Zeigen Sie, dass die Vierecke, in die das größere Kathetenquadrat zerlegt wird, alle zueinander kongruent sind.
(Tipp: Die Diagonalen des Quadrats teilen jedes der Vierecke in zwei Dreiecke.)

b) Zeigen Sie am zusammengesetzten Hypotenusenquadrat:
(i) Die lange Seite des grünen Puzzlestücks (u) ist so lang wie die Seite des gelben Quadrats (b) und die kurze Seite des blauen Puzzlestücks (v) zusammen, u=b+v.
(ii) Die Seite t des grünen und des blaue Puzzleteils sind zusammen so lang wie die Seite c, c=2t.

2) Zeigen Sie, wo der Fehler bei der folgenden Zerlegung eines (scheinbar) rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten 5 und 13 liegt:



3) Die Bildfolge soll einen Beweis nach Pappus für den Satz des Pythagoras wiedergeben. Ergänzen Sie dazu die fehlenden Bilder an den Stellen 3 und 5.

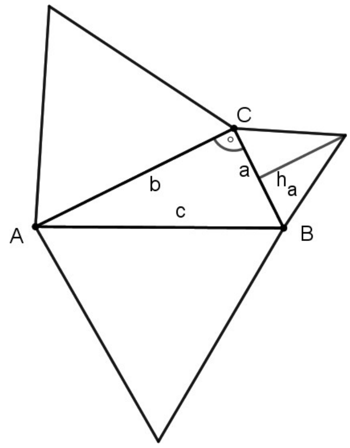


(1) (2) (3) (4) (5)

a) Zeigen Sie, dass die gemeinsame Seite der Parallelogramme in (4) kongruent ist zur Hypotenuse des (gelben) Dreiecks.

b) Begründen Sie, weshalb der Flächeninhalt der (roten) Vierecke bei jeder der Transformationen gleich bleibt.

4) Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC seien gleichseitige Dreiecke errichtet.



a) Zeigen Sie dass im gleichseitigen Dreieck über der Seite a für die Höhe h_a gilt: $h_a = \frac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}$.

b) Beweisen Sie, dass die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks über der Hypotenuse ist.

c) Beweisen Sie, dass eine entsprechende Aussage wie in b) auch gilt, wenn man statt Dreiecken Halbkreise nimmt.

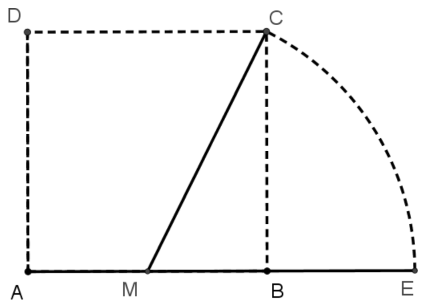
5) Gegeben sei ein Rechteck der Länge 7 und Breite 2. Konstruieren Sie ein Quadrat gleichen Flächeninhalts

a) auf der Grundlage des Kathetensatzes,

b) auf der Grundlage des Höhensatzes.

Geben Sie jeweils eine Konstruktionsbeschreibung für GeoGebra an und fügen Sie einen Ausdruck der Konstruktion hinzu.

6a) Zeigen Sie, dass in der nebenstehenden Figur das Längenverhältnis von [AE] zu [AB] der Goldene Schnitt ist. (ABCD ist ein Quadrat, M ist die Mitte von AB.)



b) Geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung (für GeoGebra) an, wie man bei vorgegebener Strecke AB den Punkt E konstruiert.

7) Geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung für ein regelmäßiges 5-Eck an, wenn eine Strecke mit der Seitenlänge a vorgegeben ist. (Tipp: Die Seitenlänge teilt die Diagonale im Verhältnis des Goldenen Schnitts.)

8) Leiten Sie anhand der Zeichnung (aus Wikipedia) die Formel des Kugelvolumens her (nach Archimedes/Cavalieri).