Größen in der Grundschule: platonisch, empirisch, semiotisch?

Michael Johann

Landau, Februar/März 2011

Zusammenfassung

Ausgangspunkt zur Beschreibung physikalischer Größen, soweit sie in der Grundschule vorkommen (Länge, Fläche, Volumen, Gewicht, Zeit), bildet herkömmlich die Relation „ist so groß wie“, für die wir im Folgenden kurz „$\sim$“ schreiben. Man zeigt üblicherweise, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und teilt die zu vergleichenden Gegenstände in Klassen gleicher Größe ein, um anschließend die sprachliche Unterscheidung zu treffen zwischen *Repräsentanten* einer Größe (z.B. einem Stab), der *Größe* selbst (der Länge des Stabes, d.i. seine Äquivalenzklasse) und der *Bezeichnung* für die Größe (40 cm).

Dieses Konzept, das ohne Zweifel nach dem Vorbild der Kardinalzahlen entwickelt wurde, unterscheidet sich davon aber in zwei wesentlichen Punkten: Erstens gibt es auf empirischer Ebene Situationen, welche die Transitivität von $\sim$ fraglich erscheinen lassen, und zweitens wird eine wesentliche Eigenschaft der o.g. Größen nicht erfasst, nämlich ihre Additivität, welche aber die Grundlage für das Rechnen mit ihnen ist.

Andererseits ergibt sich aus der Analyse des Messprozesses additiver Größen eine empirisch angemessenere Beschreibung derselben. Dazu wird die Messung unter Berücksichtigung der Messungenauigkeit als Abbildung in Intervalle von $\mathbb{R}$ interpretiert. Aber Messen geht auch gänzlich ohne Zahlen: Am Beispiel der Längen zeigen wir, dass ein nicht-numerischer Größenbegriff denkbar ist, indem man Größenangaben als Zeichen im semiotischen Sinne interpretiert. Auf dieser Grundlage ist es uns schließlich möglich eine Messfunktion additiver Größen konstruktiv zu beschreiben.

$\sim$ ist nicht wirklich transitiv

Weshalb hat man in früherer Zeit in vielen Städten das lokal gültige Längenmaß konkret installiert etwa an Rathäusern oder Kirchen? Weshalb unterhält man heute nationale und internationale Institutionen für die Eichung von Messgeräten u.a. zur Längenbestimmung? Warum kopiert man nicht einfach das Normmaß und fertigt bei Bedarf von diesen Kopien wiederum welche an? Die Antwort lautet: Weil sich die Kopie der Kopie eines Normmaßes merklich von diesem unterscheiden kann. Aus eigener Erfahrung wissen wir, dass es Situationen gibt, in denen zwar $a \sim b$ und $b \sim c$ gilt aber nicht $a \sim c$. Wenn etwa zur Herstellung gleich langer Schnüre die erste Schnur zum Abmessen der zweiten benutzt wird und diese zum Abmessen der dritten. Kann man da noch behaupten, $\sim$ sei transitiv? Man kann durchaus, nämlich mit Hinweis auf die Unzulänglichkeit konkreter Vergleiche und Messungen. Denn es ist naheliegend und plausibel anzunehmen, dass die genannten Beispiele durch Ungenauigkeiten beim Messen zustande kommen. So ist z.B. denkbar, dass Objekte a und b sowie b und c hinsichtlich einer Größe im Rahmen der Messgenauigkeit auch bei sorgfältiger Messung zwar nicht unterscheidbar sind ($|a-b|<\epsilon$ und $|b-c|<\epsilon$) — aber a und c dann doch aufgrund der Addition der Messfehler ($|a-c|>\epsilon$). Dennoch können wir festhalten, dass die Transitivität von $\sim$ auf empirischer Ebene nur eingeschränkt, nämlich im Rahmen der Messgenauigkeit, Gültigkeit hat.

Dahingegen ist die Transitivität der Relation bei den Kardinalzahlen unproblematisch, da der „Messfehler“ dort Null ist – Wenn A so viele Elemente hat wie B und B so viele wie C, dann haben A und C ohne Zweifel gleich viele Elemente. Deshalb brauchen wir z.B. auch kein Eich-Institut um die Gleichmächtigkeit unserer zehn Finger oder einer anderen 10er-Menge mit einer Norm-Menge von zehn Elementen zu gewährleisten.

Mit der Berücksichtigung von Messfehlern bei kontinuierlichen Größen ändert sich allerdings auch Grundlegendes am Vergleichs-Begriff: Wir können von konkreten Objekten nicht mehr mit derselben Sicherheit sagen, dass sie gleich groß sind, wie wir sagen, dass sie verschieden sind. Es handelt es sich genauer besehen sogar um Aussagen recht unterschiedlicher Art: Letztere gibt eine beobachtbare Tatsache wieder, während erstere nur eine Behauptung ist, um das Scheitern solcher Beobachtungen zu begründen – *hypothetisch* zu begründen. Denn aus der Gültigkeit dieser Behauptung ließe sich zwar trivialerweise folgern, dass ein Unterschied nicht feststellbar ist, aber die Behauptung selbst ist und bleibt wegen der Ungenauigkeit der Messung prinzipiell unsicher.

Sind konkrete Objekte a und b hinsichtlich einer Größe vergleichbar, dann bestehen zwei Möglichkeiten:	Ein Unterschied ist empirisch nicht festzustellen.	$\longrightarrow$	Man vermutet, dass nie ein Unterschied gemessen wird, und begründet das hypothetisch mit der Behauptung, a und b seien gleich groß.
	Ein Unterschied ist empirisch nachweisbar.		

Während also eine Aussage der Form „a und b sind unterschiedlich groß“ durch einmalige Beobachtung verifizierbar ist, kann eine Aussage der Form „a und b sind gleich groß“ durch eine einzige Beobachtung zwar falsifiziert nicht aber durch noch so viele Messungen verifiziert werden. Sie ist in dieser Hinsicht vergleichbar mit einem empirischen Gesetz, das sich in vielen Versuchen und Anwendungen bewähren kann, aber gegebenenfalls auch durch ein einziges Experiment widerlegbar ist.

Ist es also überhaupt zulässig zu behaupten, Objekte seien gleich groß und diese Beziehung sei eine Äquivalenzrelation? Nun, es ist zumindest *denkbar*. Und wenn die Ungleichheit mit den gegebenen Mitteln nicht wahrnehmbar ist, dann ist es nicht nur zulässig sondern auch naheliegend und plausibel, die Gleichheit anzunehmen -– wennschon nicht zwingend. Wir kennen in diesem Fall zwar nicht den „wahren“ Sachverhalt, und es wäre durchaus möglich, dass die Objekte tatsächlich verschieden groß sind, ohne dass wir dies direkt messen könnten. In der antiken Astronomie etwa war im Lauf eines Jahres kein Unterschied in der Position der Fixsterne messbar (sog. Sternparallaxe), wie das nach heliozentrischer Vorstellung zu erwarten gewesen wäre — also blieb man beim geozentrischen Weltbild.

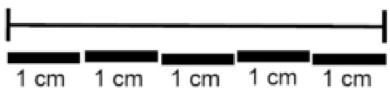
Fruchtbar und sogar notwendig ist dieser Gedanke, dass es gleich große Objekte gibt, darüber hinaus in der klassischen Geometrie – sonst gäbe es dort weder Quadrate noch Kreise. Aber genau das warf schon in der Antike die Frage nach dem Realitätsbezug der Geometrie auf. Eine Antwort darauf lieferte Platons Ideenlehre, die auch heute noch Mathematikern als weltanschauliche Begründung ihrer Arbeit genügt. In didaktischer Hinsicht ist diese Lehre jedoch wenig brauchbar, da sie mathematische Denkweisen bereits voraussetzt und nicht erklärt, wie sie im Lernenden entstehen können (es sei denn man glaubt an angeborene mathematische Ideen).

Dagegen ermöglicht eine kritische Auseinandersetzung mit dem Vergleichs- und Messprozess kontinuierlicher Größen ein pragmatisches Verständnis von Mathematik. Denn die Gleichheit wird hier nicht zwingend vorausgesetzt sondern nur als naheliegend angenommen, wenn trotz gründlichen Vergleichs kein Unterschied festzustellen ist. Es ist eine Mathematisierung eines alltäglichen Sachverhalts. Die Erfahrung liefert somit eine Motivation zur Annahme einer abstrakten Vermutung, ohne die Realität mit der Unzulänglichkeit unserer Wahrnehmung ignorieren zu müssen.

Zur Additivität von Größen

Die folgende Bemerkung zur Additivität nimmt zwar nicht so viel Raum ein wie die zur Transitivität, aber sie gibt uns Anlass für einen sachlich angemesseneren Zugang zu den physikalischen Größen.

Nicht-additive Größen wie die Temperatur unterscheiden sich hinsichtlich der Relation $\sim$, „ist so groß wie" nicht von additiven. In beiden Fällen kann man sich $\sim$ als Äquivalenzrelation denken. Im Hinblick auf das Rechnen mit Größen ist aber entscheidend, dass es für nicht-additive Größen keine Verknüpfung gibt wie bei den additiven. Schüttet man zwei Gläser mit 30° warmem Wasser zusammen, dann erhält man eben nicht Wasser von 60°. Durch das Äquivalenzklassen-Konzept kann dieser Unterschied also nicht erklärt werden. Aber er zeigt sich im Messprozess: Zur Messung einer additiven Größe werden typischerweise mehrere Kopien einer Maßeinheit aneinandergefügt, bis sie zusammengenommen die gleiche Größe haben wie das zu messende Objekt. Und das geht bei der Temperaturmessung so nicht.



Die Messung bestimmt die Größe

Dieses Vorgehen beim Messen von additiven Größen legt nahe, die Messung als lineare Abbildungen von konkreten Gegenständen in die reellen Zahlen aufzufassen. So gesehen ist die Messung von Längen eine Abbildung L mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt eine Linie e mit der Länge 1, $L(e) = 1$.
  e heißt „Maß" oder „Maßeinheit".

- Für beliebige Linien s und t gilt: $s \sim t \to L(s) = L(t)$

- und $L(s \cup t) = L(s) + L(t)$.
  $s \cup t$ ist die Linie, die durch die Verbindung von s und t entsteht.

Aber das gilt aufgrund unvermeidbarer Messungenauigkeiten nur idealisiert, wenn der Messfehler Null ist. Treffender ist es, das Messergebnis als Intervall $[m - \epsilon; m + \epsilon]$ um den Messwert $m \in \mathbb{R}$ herum zu beschreiben, wofür auch die Schreibweise $m \pm \epsilon$ üblich ist, mit ϵ als Messungenauigkeit. Die Eigenschaften der Messfunktion L für Längen lauten dann wie folgt:

- Es gibt eine Linie e mit der Länge 1, $L(e) = 1$ (die Maßeinheit).
  Da es sich hier nicht um eine Messung sondern um eine konventionelle Festlegung handelt, gilt diese Zuordnung exakt ($\epsilon = 0$).
- Sind zwei Linien gleich lang, dann sind ihre als Intervalle angegebenen Messergebnisse ungefähr gleich: $s \sim t \to L(s) \approx L(t)$.
  Insbesondere müssen sich die Intervalle überschneiden: $L(s) \cap L(t) \neq \emptyset$.
- Werden zwei Linien s und t zusammengefügt zu einer Linie $s \cup t$, dann gilt für die Messergebnisse dieser Linien: $L(s \cup t) \approx L(s) + L(t)$.
  Insbesondere gilt $L(s \cup t) \cap (L(s) + L(t)) \neq \emptyset$.

Es ist eine der großen Leistungen von C.F. Gauß gewesen, den Umgang mit Messungenauigkeiten in seiner Fehlerrechnung mathematisch präzisiert zu haben. Und es ist insofern geradezu peinlich, dass auch zwei Jahrhunderte später noch in der Ausbildung von Lehrern in Mathematik so getan wird, als lebten wir in der platonischen Ideenwelt, wo es keine solchen Ungenauigkeiten gibt.

Es ist nicht alles Zahl

Man erwartet auf die Frage nach der Größe eines Gegenstandes i.Allg. eine Zahl als Antwort. Deshalb haben wir die Messfunktion als Abbildung in die reellen Zahlen definiert. Aber das müsste so nicht sein und die Bezeichnungen vieler historischer Maßeinheiten weisen darauf hin, dass es Entwicklungsgeschichtlich wohl einmal anders war: „Schritt“ oder „Fuß“ als Längeneinheit, „Eimer“ als Volumenmaß, „Pfenniggewicht“ als Gewichtsmaß. Man verglich zur Bestimmung der Größe eines Gegenstandes diesen mit einem anderen und gebrauchte *diesen anderen* dann als Größenangabe. Gelegentlich passiert uns Ähnliches auch heute noch, wenn wir etwa zur Längenbestimmung mangels eines gebräuchlichen Gliedermaßstabes eine Schnur spannen. Mittels dieser Schnur können wir die Größe des gemessenen Gegenstandes mit einem anderen vergleichen, gerade so wie mittels eines Gliedermaßstabes. Auf der Schnur würden wir wohl eine Markierung anbringen, falls sie länger wäre als der Gegenstand. Das brauchen wir am Gliedermaßstab nicht mehr selbst zu tun. Wir müssen uns dafür aber die Position des entsprechenden Skalenstriches merken. Das sind jedoch nur unwesentliche Unterschiede, und als Mittel zum Vergleich zweier Strecken eignet sich beides. Der Vorteil einer numerischen Längenangabe mit einer konventionellen Maßeinheit zeigt sich erst, wenn wir mit anderen Menschen darüber kommunizieren wollen. Denn andere Menschen haben vielleicht nicht unsere Schnur mit der Markierung zur Verfügung, und man müsste sie ihnen zum weiteren Gebrauch erst zukommen lassen. Das ginge zwar zur Not, ist aber umständlich. Darin liegt der Vorteil einer Maßzahl mit konventioneller Maßeinheit.

Aber lassen wir die Probleme der Kommunikation einmal außer Acht, dann ist die markierte Schnur als Längenangabe ebenso brauchbar wie eine Maßzahl, und sie ist ebenso gut eine Antwort auf die Frage nach der Länge eines Gegenstandes. Doch wie beschreiben wir nun die Messfunktion – eine Abbildung in die reellen Zahlen ist sie nicht mehr. Hier hilft uns die Semiotik weiter. Fassen wir also die markierte Schnur als Zeichen auf.

> Ein Zeichen ist etwas, wodurch wir uns etwas
> anderes in gewisser Hinsicht vergegenwärtigen.

Speziell durch die markierte Schnur vergegenwärtigen wir uns etwa den Abstand zweier Punkte an einem Gegenstand. Insbesondere setzt diese Zeichenfunktion bereits ein Längenverständnis voraus, hinsichtlich dessen der Vergleich von Objekten durchgeführt wird. Fassen wir nämlich den Abstand zweier Punkte als kürzeste Verbindungslinie zwischen ihnen auf, dann muss die Schnur als Zeichen für die Länge dieser Linie im Rahmen der Messgenauigkeit ebenso lang sein. Es ist ein ursprüngliches Verständnis von Längen als Phänomen in der Beziehung des Menschen zu seiner Umwelt, das hier vorausgesetzt wird, z.B. die Erfahrung eines Kindes, dass seine Hand zum Regalbrett mit der Schokolade nicht, gerade so oder darüber hinaus reicht ($<, \approx, >$). Eine Schnur mit dieser Zeichenfunktion nennen wir eine exemplarische Längenangabe. Allgemein:

> Eine *exemplarische Längenangabe* ist eine Linie, durch die wir uns die Länge einer anderen Linie vergegenwärtigen. Insbesondere sind beide Linien im Rahmen der Messgenauigkeit gleich lang.

Als mathematische Struktur $(G, Z, <)$ aufgefasst können wir solche Größenbereiche folgendermaßen beschreiben:

- G ist eine Menge konkreter Objekte
- $Z \subset G$ ist die Menge der exemplarische Größenangaben
- $<$ ist eine strenge Ordnung auf G. Für zwei beliebige Elemente $g_1, g_2 \in G$ gilt stets genau eine der drei folgenden Relationen:
  a) $g_1 < g_2$,
  b) $g_2 < g_1$,
  c) $g_1 \approx g_2$.

Diese semiotische Sichtweise hat mit dem Äquivalenzklassen-Konzept ein paar bemerkenswerte Gemeinsamkeiten:

1. Beide setzen ein Längenverständnis voraus, hinsichtlich dessen der Vergleich von Objekten durchgeführt wird – im einen Fall, um Äquivalenzklassen zu bilden, im anderen Fall, um gewissen Objekten Zeichenfunktion gegenüber anderen zuzusprechen.

2. Maßzahlen sind nach dem Äquivalenzklassen-Konzept keine Längen, und sie sind nach obiger Definition keine exemplarischen Längenangaben. Denn eine Maßzahl ist semiotisch gesehen nur ein Zeichen *für* eine solche Längenangabe – gebildet aus aneinandergereihten Maßeinheiten –, aber sie ist nicht selbst eine Linie mit dieser Zeichenfunktion.

Deshalb nennen wir Maßzahlen *numerische Längenangaben.*

3. Und schließlich können mit beiden Konzepten sowohl additive als auch nicht-additive Größen beschrieben werden. Für das Äquivalenzklassen-Konzept haben wir das weiter oben bereits mit Hinweis auf den Größenbereich Temperatur angedeutet. In semiotischer Hinsicht ist eine explizite Temperaturangabe ein Objekt, das auf die gleiche Temperatur gebracht wurde wie ein anderes, um uns dessen Temperatur zu vergegenwärtigen. Darauf beruht das Messverfahren herkömmlicher Thermometer, die dann noch weitere Eigenschaften der exemplarische Temperaturangabe verwenden, um zu einer numerischen zu gelangen. Insbesondere gilt für den semiotischen Ansatz genau wie für das Äquivalenzklassen-Konzept, dass die Additivität als wesentliche Eigenschaft der betrachteten Größen nicht erfasst wird – noch nicht. Wir kommen gleich darauf zurück.

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Konzepten besteht in dem Gedanken an Äquivalenzklassen einerseits und dem an Objekte mit Zeichenfunktion andererseits. Man könnte zwar das Äquivalenzklassen-Konzept dahingehend an die semiotische Sichtweise anpassen, dass man nur ausgewählte Elemente einer Klasse als Repräsentanten zulässt. Aber wir halten die Äquivalenzklassen als solche für überflüssig, da sie rein gedankliche Objekte sind, deren praktischer sowie theoretischer Nutzen uns im Fall der Größen – gelinde gesagt – zweifelhaft erscheint. Und warum sollten wir ein Konzept, dessen Grundbegriffe wir teilweise für unangemessen halten, noch erweitern, wenn wir eine einfachere und angemessenere Alternative zur Wahl haben?

Es werde Zahl

Kommen wir schließlich zur Formulierung der Additivität im semiotischen Konzept. Es wäre jetzt naheliegend, den Größenbereich Längen als algebraische Struktur $(G, \cup, <)$ zu beschreiben, wie das in der didaktischen Literatur üblich ist. Unser Interesse gilt aber vor allem dem Messprozess, der im Prinzip eine Division mit Rest ist. Und diese ist daraus nicht ableitbar. Sie lautet (für Längen):

> e und ℓ seien Linien und es gelte $e < \ell$. Dann ist ℓ bis auf einen eventuell vorhandenen Rest r mit $r < e$ in eine eindeutig bestimmte Anzahl n von Linien der Länge e zerlegbar,
> $\ell = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \ell_i \cup r$ mit $\ell_i \approx e$ für $i = 1...n$ und $r < e$, falls r existiert.
>
> Wir notieren in diesem Fall $\ell = n * e \cup r$.
> ($n * e$ ist also nur eine andere Schreibweise für $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \ell_i$ mit $\ell_i \approx e$)

Größenbereiche mit einer solchen Eigenschaft nennen wir *quantifizierbar*; es sind Strukturen $(G, Z, E, <, \cup)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $(G, Z, <)$ ist ein Größenbereich
- $E \subset Z$ ist die Menge der Maßeinheiten
- $\cup$ ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf G

- Für $e \in E$ und $g \in G$ gelte $e < g$. Dann ist g bis auf einen eventuell vorhandenen Rest r mit $r < e$ in eine eindeutig bestimmte Anzahl n von Objekten der gleichen Größe wie e zerlegbar, $g = n * e \cup r$.

Es ist diese Division mit Rest, mit deren Hilfe wir eine Messfunktion $M_e : G \mapsto \{[a,b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ bzgl. einer Maßeinheit e definieren können:

$$M_e(g) = \begin{cases} [n; n+1] & \text{für } g \approx n * e \cup r \\ [n-\epsilon; n+\epsilon] & \text{für } g \approx n * e \end{cases}$$

Für diese Funktion gilt $M_e(g \cup h) \approx M_e(g) + M_e(h)$ für $g, h \in G$. Also sind quantifizierbare Größenbereiche additiv.

Neu ist hier die Art der Messungenauigkeit im ersten Fall: Der Messwert ist $n + 1/2$ und die Ungenauigkeit $1/2$. Denn g ist wegen des Rests zwar feststellbar größer als n Teile der Größe e, aber es ist nicht groß genug, um in $n+1$ oder mehr Teile dieser Größe zerlegbar zu sein.[1] Dies kommt durch die Verwendung von Maßeinheiten zustande und ist vergleichbar dem sog. *Quantisierungsfehler* bei digitalen Messgeräten. Eigentlich entstehen solche Fehler aber auch bei analogen Messgeräten, nämlich sobald der Messwert zwischen benachbarten Skalenstrichen liegt und das Messergebnis numerisch notiert wird. Zutreffender wäre daher die Bezeichnung *Digitalisierungsfehler*. Dagegen beruht die Messungenauigkeit im zweiten Fall (ϵ) nur auf dem bereits besprochenen *Diskriminationsfehler* also dem Problem, Objekte hinsichtlich einer Größe mit den gegebenen Mitteln nicht unterscheiden zu können, obwohl sie möglicherweise doch verschieden sind.

Im Unterschied zum Diskriminationsfehler lässt sich der Digitalisierungsfehler durch die Verwendung einer geeigneten kleineren Maßeinheit (e') reduzieren: Ist $r > e' \in E$, so kann r mittels e' durch nochmalige Anwendung der Division mit Rest ausgemessen werden, was zu einem Digitalisierungsfehler $r' < e'$ führt:

$$g = n * e \cup \underbrace{n' * e' \cup r'}_{\approx r}$$

Ist $e = 10 * e'$ wie bei dekadischen Maßsystemen, so werden die jeweiligen Maßzahlen n und n' zu einer Zahl des dekadischen Stellenwertsystems zusammengesetzt. Dieses Vorgehen ist so lange durchführbar, bis der Digitalisierungsfehler nicht mehr feststellbar ist, was bedeutet, dass er in der Größe von ϵ liegt.

I.Allg. haben wir also eine Basis-Maßeinheit e_0 und daraus abgeleitete *Maßverfeinerungen* $e_{-1}, e_{-2}, \ldots$ sowie *Maßvergröberungen* $e_1, e_2, \ldots$, für die im dekadischen System $e_n = 10 * e_{n-1}$ gilt. Damit ergibt sich folgende Zerlegung für ein Objekt g:

$$g = \ \ldots n_1 * e_1 \cup n_0 * e_0 \cup n_{-1} * e_{-1} \ldots \quad \text{mit } 0 \leq n_i \leq 9$$

Wegen der Eindeutigkeit dieser Zerlegung bei vorgegebenen Maßeinheiten können wir g folgenden Messwert zuordnen: $\#_{e_0}(g) = \sum n_i 10^i$. Und die Messungenauigkeit ist hier nur noch durch den Diskriminationsfehler bestimmt.

[1] Falls abschätzbar ist, ob $r < \frac{1}{2}e$ gilt oder nicht, rundet man den Messwert üblicherweise auf n oder $n+1$. Der maximale Messfehler (in diesem Fall bei $r \approx \frac{1}{2}e$) ändert sich dadurch jedoch nicht, weshalb wir darauf nicht weiter eingehen.