Michael Johann, Landau, März 2001

Neue Wege im Arithmetikunterricht der Grundschule

1 Vorbemerkung

Drei Jahre lang – von 1997 bis 2000 – habe ich eine Grundschulklasse vollständig und eigenverantwortlich vom zweiten bis zum vierten Schuljahr in Mathematik unterrichtet. Mein zentrales Anliegen war die Vermittlung eines inhaltlichen Verständnisses der Arithmetik. Mein wichtigstes Werkzeug war dabei eine stilisierte Form des Abakus, wovon jedem Schüler ein Exemplar zur Verfügung stand – Schulbücher benutzte ich nur selten. Dadurch gelang es, im zweiten Schuljahr die Addition und Subtraktion – sowie darauf aufbauend – im dritten Schuljahr die Multiplikation und Division im dekadischen Stellenwertsystem vollständig zu behandeln. Im vierten Schuljahr konnte ich dann die Schüler in die Bruchrechnung bis hin zur Addition und Subtraktion einführen und behandelte in diesem Zusammenhang auch noch periodische Dezimalbrüche. Da außer den grundlegenden Handlungen am Abakus keine Algorithmen „trainiert“ wurden, kann man davon ausgehen, dass die Rechenfertigkeit der Kinder auf inhaltlichen Überlegungen beruhte, was sich auch an der Individualität der Rechenwege zeigte.

2 Etliche Altlasten ...

Nach meinem Dafürhalten ist der übliche Rechenunterricht an Grundschulen trotz vieler Versuche, die Vermittlung von Mathematik ins Zentrum zu stellen, nur ein *Rechen*-Unterricht im schlechten Sinne geblieben: Das Drillen von Normverfahren scheint noch immer das hauptsächliche Ziel zu sein. Dies ist aber nur einer der auffälligsten Mängel des derzeitigen Mathematikunterrichts an Grundschulen, von denen ich hier einige kurz betrachten möchte.

▷ Das **Zahlverständnis**, das Kinder bei Schuleintritt besitzen, wird durch den Unterricht im Wesentlichen auf die Zählzahlen eingeschränkt, vielleicht auch wegen des Chaos in der Darstellung der sogen. Zahlaspekte in der didaktischen Literatur. Nach einigen mehr oder weniger unmethodischen Übungen des Zählens sollen die Schüler alle Rechenaufgaben des ersten Schuljahres zählend lösen können. Da dies ohne Berücksichtigung der Zehnerbündelung geschieht, welche den gesprochenen Zahlwörtern ebenso wie den geschriebenen Ziffernzahlen zugrunde liegt, werden zweistellige Zahlen ebenso wie die einstelligen nur als schriftliche Form der gesprochenen Zahlwörter angesehen. Es ist also nicht weiter verwunderlich, wenn Schüler bei einer Aufgabe mit Zehnerüberschreitung das sogenannte Auffüllen zum Zehner als unmotiviert empfinden. Dieses einseitige Zahlverständnis wird von den meisten Schulbuchwerken durch die Verwendung des Zahlenstrahls zum Rechnen noch gefördert.

Aber auch in den Klassen zwei, drei und vier gelingt es kaum, das Zahlverständnis der Schüler im Sinne des Stellenwertsystems zu erweitern. Dies zeigt sich bereits mit aller Deutlichkeit bei der Subtraktion von Stellenwertzahlen: Trotz – oder vielleicht auch gerade wegen – des mühseligen Aufbaus dieser Rechenart im zweiten und vor allem im dritten Schuljahr sind Schüler am Ende ihrer Grundschulzeit nicht fähig, das Normverfahren zu begründen. Die meisten Fehler, die Schüler bei der Durchführung dieses Verfahrens machen (stellenweises Vertauschen von Minuend und Subtrahend, Übertragsfehler, insbesondere Probleme mit der Ziffer „0“, usw.) lassen sich auf ein fehlendes Verständnis für das Verfahren zurückführen. Sie können daher nicht – wie oft vorgeschlagen wird – durch besondere Schreib- oder gar Sprechformen behoben werden.

Ein inhaltliches Verständnis für Stellenwertzahlen und die mit ihnen verbundenen Rechenverfahren kann zwar durch herkömmliches Bündelmaterial (z.B. nach Dienes oder Montessori) – jedoch nicht am Zahlenstrahl – geweckt werden, aber in der Schulpraxis ist dieses Material – wenn überhaupt – dann gewiss nicht für alle Schüler vorhanden. Die ikonischen Darstellungen in Schulbüchern können von Schülern deshalb nicht zu einer enaktiven Phase in Verbindung gesetzt werden und sind insofern bedeutungslos.

Die in der Schulpraxis zu beobachtende Einseitigkeit des Zahlverständnisses hat ihre Ursachen m.E. aber auch in der Hochschulausbildung der Lehramtsstudenten. So sind die einzigen präzisen Beschreibungen der natürlichen Zahlen, an denen man sich an Hochschulen i.Allg. orientiert, die der fachwissenschaftlichen Mathematik, z.B. nach Dedekind/Peano/v. Neumann oder nach Cantor/Frege/Russell. Die Motive, die zu diesen Beschreibungen führten, sind aber ganz andere als diejenigen, die ein Lehrer hat, wenn er Schüler zu einem bestimmten Zahlverständnis wie dem der Stellenwertzahlen führen möchte. Die mathematischen Beschreibungen sind dafür gar nicht brauchbar.

▷ Charakteristisch für den althergebrachten Rechenunterricht z.B. aus der Zeit um 1900 war das reihenweise **Memorieren** der Sätze des Eins-plus-Eins, Eins-minus-Eins, Ein-mal-Eins und Eins-in-Eins. Mit dem Einzug der „Neuen Mathematik“ in die Grund- und Hauptschulen wurden alle diese Inhalte bis auf das Ein-mal-Eins aus dem Unterricht endgültig verdrängt. Dass sich lediglich das stupide Memorieren des Ein-mal-Eins bis heute in Schulbuchwerken hält, ist u.a. durch seine Verankerung in unserer Gesellschaft zu begründen. Die Notwendigkeit des Memorierens der Ein-mal-Eins–Sätze lässt sich aber auch im Hinblick auf die schriftlichen Verfahren der Multiplikation und Division begründen. Konsequenterweise müssten dann Schulbuchautoren und Lehrplan-Macher aber auch das Memorieren des Eins-plus-Eins im Hinblick auf die schriftlichen Verfahren der Addition und Subtraktion fordern – was kaum geschieht. Dieses Versäumnis hat für viele Schüler fatale Folgen: Noch im vierten und fünften Schuljahr benötigen sie konkretes Material (u.a. die Finger), um einfache Additionsaufgaben im Zahlbereich bis 20 lösen zu können. Alle Fälle sogenannter Rechenschwäche, die mir bekannt sind, konnten ursächlich auf diese und andere Defizite des Mathematikunterrichts zurückgeführt werden, so dass es mir hier passender erscheint, von einer *Didaktikschwäche* der Lehrer zu reden, als Kindern in dieser Hinsicht geistige Defekte zu unterstellen. Und es wäre viel vernünftiger, didaktikschwache Lehrer in Aus- und Weiterbildung zu therapieren, als die Schüler dieser Lehrer.

Obgleich also die Aufnahme eines reihenweisen Memorierens des Eins-plus-Eins in den Lehrplankanon in der heutigen Situation als Fortschritt anzusehen wäre, ist es doch nicht als Ziel anzustreben. Zum einen ist diese Art des Memorierens, wie sie noch heute beim Ein-mal-Eins üblich ist, psychologisch äußerst fragwürdig und daher auch nur bei massiver Unterstützung durch Eltern oder andere außerschulische Erzieher möglich. Zum anderen verhindert diese Art des Memorierens auch die Entwicklung eines angemessenen Zahlverständnisses, indem sie das Verstehen der entsprechenden Zahlensätze überflüssig macht. Im Fall des Ein-mal-Eins lässt sich dies vortrefflich beobachten, wenn man Schüler des dritten oder vierten Schuljahres z.B. danach fragt, was 8 mal 7 bzw. was 11 mal 7 ist. Während sie auf die erste Frage sehr schnell die richtige Antwort geben, müssen sie bei der zweiten Frage relativ lange nachdenken – verkehrte Welt! Nun muss das Memorieren des Eins-plus-Eins und Ein-mal-Eins ja nicht reihenweise geschehen – einige Anregungen dazu, wie es intelligenter geschehen kann, sind beispielsweise bei WITTMANN/MUELLER zu finden. Und wie man insbesondere auch die Finger strukturierend zum Aufbau des Eins-plus-Eins einsetzen kann, will ich demnächst in einem kleinen Artikel darlegen (s. [5]).

▷ Ein wesentlicher Vorteil von Stellenwertzahlen gegenüber anderen Arten von Zahlzeichen liegt in der Einfachheit der **Algorithmen** zu den Grundrechenarten, vor allem denen der Multiplikation und der Division. Aber gerade in diesem Bereich ist ein eklatantes Versagen der Mathematikdidaktik festzustellen. Besonders deutlich wird dies bei der Vermittlung des Divisionsalgorithmus: Die Grundschule ist noch nicht einmal fähig, diesen Algorithmus für mehrstelligen Divisor allgemein zu vermitteln; und das Wenige, das diese Schule zu vermitteln vermag, gerät bis zum Beginn des fünften Schuljahres wieder in Vergessenheit, weswegen das fünfte Schuljahr zu einem erheblichen Teil den Stoff der Grundschule wiederholen muss. Aber auch am Ende dieses Schuljahres kann man von einem Schüler höchstens erwarten, dass er eine Divisionsaufgabe korrekt löst. Weshalb aber der von ihm benutzte Algorithmus eine korrekte Lösung liefert, das wird er nicht beantworten können. Und dabei ist diese Rechenleistung eines Schülers im Vergleich zu der eines gewöhnlichen Taschenrechners noch ausgesprochen erbärmlich. Im Hinblick auf die allgemeine Verfügbarkeit von Taschenrechnern erscheint mir die herkömmliche Vermittlung der schriftlichen Verfahren tatsächlich äußerst fragwürdig. Unsere Schüler werden trotz dieser technischen Revolution des ausgehenden 20. Jahrhunderts noch immer so unterrichtet als wollte man sie zu Buchhaltern des 19. Jahrhunderts ausbilden. Der Schaden, der durch diese Art mathematischer „Missbildung“ in der Primarstufe angerichtet wird, ist gar nicht zu überschätzen. Dass sich Schüler auch im Mathematikunterricht der höheren Klassen gerne an Algorithmen klammern, ohne diese inhaltlich verstanden zu haben, darauf werden sie im Mathematikunterricht der Primarstufe bereits bestens vorbereitet. Nichts gegen Algorithmen! Aber es geht darum, sie im Unterricht mit Verstand zu entwickeln, d.h. zu erzeugen und zu moderieren, nicht aber um ein blindes Abarbeiten.

Immerhin mehren sich mittlerweile die Stimmen derer, die gegen solch einseitige Vermittlung starrer Algorithmen sprechen. Es ist aber nicht zu erkennen, wodurch der bisherige Unterrichtsinhalt ernsthaft ersetzt werden soll. Gelingt es aber tatsächlich, die schriftlichen Verfahren aus Lehrplänen und Schulbüchern zu verbannen, so wird vermutlich die Zahl der Schüler mit angeblicher Rechenschwäche noch weiter steigen. Wenn aber die schriftlichen Verfahren in ihrer Bedeutung für den Unterricht nur relativiert werden sollen (ohne sie abzuschaffen), dann frage ich mich, wie man es nun in kürzerer Zeit als bisher schaffen will, diese Verfahren doch zu vermitteln.

Nun sind im gegenwärtigen Unterricht durchaus Ansätze erkennbar, den Schülern die schriftlichen Rechenverfahren verständlich zu machen und sie diese nicht nur nachahmend ausführen zu lassen. Ich denke hier an das sogenannte *halbschriftliche* Rechnen (eine unpassende Bezeichnung, die wohl aussagen soll, dass man „auf halbem Wege“ zum schriftlichen Normalverfahren ist; passender würde man diese Art des Rechnens deswegen *halbnormales* Rechnen nennen). Allerdings ist den üblichen Darstellungen halbschriftlicher Verfahren in Schul- und Hochschulbüchern leider auch so manches Verständnisdefizit der Autoren hinsichtlich des Stellenwertsystems zu entnehmen.[1] Wie kann es beispielsweise sein, dass als Anschauungsmaterial in diesem Zusammenhang Bündelmaterial ohne Stellenwert (z.B. nach Dienes oder Montessori) benutzt wird, wohingegen doch der Abakus das einzige Material ist, das tatsächlich ein Stellenwertsystem verkörpert. Die pleonastische Verwendung solchen Bündelmaterials in Stellenwerttafeln löst nur deshalb keine entsprechende Verwirrung aus, weil es als schematische Hilfe von Schülern zum Glück ignoriert wird. Das Rechnen mit diesem Bündelmaterial erscheint so, als würde man mit römischen Zahlzeichen in einem Stellenwertsystem rechnen wollen. Der Aufwand, der dabei getrieben wird, wirkt im Vergleich zum Abakusrechnen geradezu gigantisch. Schon aus diesem Grund ist das herkömmliche halbschriftliche Rechnen als Erklärung des schriftlichen Rechnens ungeeignet.

Die Stufenfolge „erst halbschriftlich, dann schriftlich“ ist darüber hinaus auch viel zu grob, um nur annähernd die Ontogenese des schriftlichen Rechnens bei Kindern angemessen zu beschreiben. Tatsächlich beobachtet man bei Kindern, die inhaltlich orientiert rechnen, mehr Stufen, die außerdem noch anderen Inhalts sind.

▷ Eine weitere Hürde für das Verständnis des schriftlichen Rechens liegt in der **Isolierung der Grundrechenarten**:

- Die Subtraktion wird durch das Ergänzen in Zusammenhang mit der üblichen Notation derart negativ verfremdet, dass der Zusammenhang zur Addi-

[1] Mir ist bewusst, dass diese Unterstellung sehr leicht als Beleidigung aufgefasst werden kann, da das Verständnis des Stellenwertsystems bereits Unterrichtsinhalt der Primarstufe ist, die wir alle erfolgreich durchlaufen haben. Andererseits ist es allein mit diesem Schulwissen schier unmöglich, z.B. die Teilbarkeitsregeln auf andere Stellenwertsysteme zu übertragen

tion oder gar zur naheliegenden Handlungsweise des Wegnehmens für Schüler nicht mehr erkennbar ist.

- Bei der Multiplikation wird schon mit dem stupiden Memorieren des Ein-mal-Eins die Verbindung zur Addition gekappt. Um aber ganz sicher zu sein, dass wirklich kein Kind ein brauchbares inhaltliches Verständnis des Multiplizierens aufbauen kann, behandelt man darüber hinaus den rechten Faktor (im mehrstelligen Fall) als Multiplikator, was der Umgangssprache der Kinder jedenfalls zuwider läuft.

- Die Division wird – kaum eingeführt – als Umkehrung der Multiplikation betrieben. Dies könnte im Rahmen des kleinen Ein-mal-Eins zwar noch mit Verstand geschehen, dem aber wirkt die anfängliche Einengung auf Divisionen ohne Rest entgegen. Die Begründung des Dividierens durch die Handlungsweisen des Aufteilens und Verteilens geht jedoch spätestens beim halbschriftlichen Dividieren gänzlich verloren, wenn zum Dividieren der Dividend zunächst nach Stellen zerlegt wird, was man geradezu als Irreführung der Schüler ansehen kann.

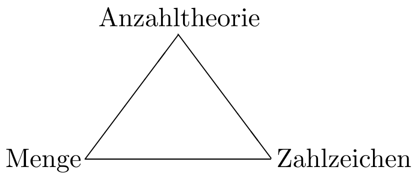
Geradezu tödlich für ein verständliches Rechnen ist nach meiner Erfahrung schließlich die Einführung normierter Endformen und insbesondere jener Rasterverfahren, die in Lehrplänen derzeit gefordert sind. Selbst wenn man Schüler mit Verstand in ihre Nähe führt, wirken diese Endformen wie Verdunkelungen, so dass die Schüler schon nach wenigen Wochen die jeweilige Notation kaum noch begründen können. Bedenkt man nun, dass im herkömmlichen Unterricht das Begründen der Notation ohnehin völlig unzulänglich oder gar nicht erfolgt und dass die zaghaften Ansätze inhaltlicher Erklärung beim halbschriftlichen Rechnen ohne konkretes Material und nur für kurze Zeit behandelt werden, dann wundert der Mangel an Verständnis nicht. Was spricht denn angesichts dieses Missstandes dagegen, als normierte Endform den Taschenrechner zu verwenden? Warum Kinder noch zu Robotern erziehen wollen, wenn wir schon bessere haben?

▷ Ein großes Problem der Primarstufe, das mit herkömmlichen Methoden nur schwer zu behandeln ist, sind **Dezimalzahlen**. Sie kommen schon in der Grundschule bei der Angabe von Längen und Geldwerten vor. Faustregeln wie „das Komma trennt DM und Pf“ sind falsch (1 DM 5 Pf $\neq$ 1,5 DM) und auf andere Größenbereiche nicht übertragbar. Eine profunde Behandlung dieser Thematik setzt das Verständnis von Dezimalbrüchen voraus. Am Abakus können Dezimalbrüche allein auf der Grundlage eines allgemeinen **Bruchzahlverständnisses** als Erweiterung des Abakus „nach rechts“ eingeführt und in Analogie dazu Maßverfeinerungen von Größen betrachtet werden. Eine ausführliche und angemessene Behandlung von Brüchen wäre in der Grundschule sowohl inhaltlich wie auch zeitlich möglich, wenn man zunächst das angemessene Material zur Vermittlung des Stellenwertsystems verwenden würde, um damit brauchbare Formen schriftlichen Rechnens in kürzerer Zeit als bisher zu entwickeln. Da sich jedoch das übliche Drama des Rechnens mit Stellenwertzahlen beim Rechnen mit Brüchen – nun vor anderen Kulissen – wiederholt, wäre man schlecht beraten, herkömmliche Schulbücher (des sechsten Schuljahres) einem Lehrgang der Grundschule zugrunde zu legen. Hinsichtlich der didaktischen Probleme bei der Bruchrechnung können tatsächlich Parallelen zur Stellenwertrechnung gezogen werden: Defizite beim Zahlverständnis und verfrühte Formalisierung der Rechnung. Mit den Defiziten beim Zahlverständnis meine ich den Begriffswirrwarr um „Anteile“, „Bruchteile“, „konkrete Brüche“, „Brüche“ und „Bruchzahlen“. Wenn $\frac{1}{2}$ kg ein „Bruchteil“ eines Kilogramms ist, warum ist dann 1 kg kein Bruchteil von 2 kg sondern ein Anteil daran? Wenn der Anteil in beiden Fällen aber $\frac{1}{2}$ ist, was ist dann im Unterschied dazu ein Bruch? Wenn man weiß, dass die Multiplikation von Größen inhaltlich nicht interpretiert werden kann, weshalb führt man dann Brüche nach dem Größenkonzept ein? Das einzig Brauchbare in Schul- und Hochschulbüchern zur Bruchrechnung sind oftmals nur die Anweisungen zur Ausführung der vier Grundrechenarten, so dass auch hier offenkundig wird, weshalb sich Schüler völlig unbeweglich an diese Algorithmen klammern.

3 . . . und ihre Entsorgung

3.1 Zum Zahlverständnis in der Grundschule

Die Verwendung der natürlichen Zahlen im Sinne des Anzahlaspektes scheint mir die wichtigste Art für den Mathematikunterricht der Grundschule zu sein. Deshalb möchte ich diese Verwendungsweise etwas genauer analysieren: Stets dann, wenn wir ein Objekt wie beispielsweise unsere Hand dazu benutzen, um die Anzahl der Elemente einer Menge anzugeben, verwenden wir dieses Objekt nicht im Hinblick auf sich selbst, sondern wir beziehen uns damit auf etwas anderes. So gesehen erfüllen solche Objekte die klassische Definition von Zeichen in der Semiotik: Aliquid stat pro aliquo. Nach einer etwas differenzierteren Charakterisierung von Zeichen i.Allg. vergegenwärtigen wir uns durch sie einen Aspekt eines anderen Gegenstandes. Der wesentliche Unterschied zwischen Zahlzeichen und anderen Zeichen besteht demnach in dem Aspekt, den wir uns vergegenwärtigen. Ich benenne ihn im Fall der Zahlzeichen mit „Vielheit“. Durch Zahlzeichen vergegenwärtigen wir uns also die Vielheit einer Menge. Nun geschieht diese Zuordnung von Mengen zu Zeichen aber nicht ohne weiteres: Eine fundamentale Eigenschaft dieser Zuordnung ist z.B., dass ein Zahlzeichen insofern beständig ist, als es zu einem späteren Zeitpunkt derselben Menge wieder zugeordnet werden kann. Dagegen sind die Eigenschaften wie Unabhängigkeit von der Anordnung der Elemente oder deren individueller Beschaffenheit, die man herkömmlich als für den Zahlbegriff konstituierend ansieht, eher nebensächlich. Zu einer Semiotik der Zahl gehört deshalb als dritte Komponente außer den eigentlichen Zahlzeichen und den Mengen, auf die sie sich beziehen, eine Theorie, die diese Beziehung gesetzmäßig beschreibt. Eine solche Theorie habe ich in [3] bereits formuliert.



Eine genauere Analyse der Tätigkeiten bei der Anzahlbestimmung führt uns darüber hinaus zu unterschiedlichen Arten der Zahlzeichenermittlung, die jeweils mit Spezialisierungen der Haupttheorie korrelieren. So führen wir bei Anzahlbestimmungen zwar stets eine bijektive Zuordnung zu einer Teilmenge eines Zeichen-Vorrats durch. Doch manche Zeichenvorräte werden linear geordnet benutzt, so dass weiterhin die Möglichkeit besteht, das zuletzt benutzte Zeichen als Zeichen für die gesamte Teilmenge und damit als Zahlzeichen für die Vielheit der Ausgangsmenge zu verwenden. So gelangen wir zu den Zählzahlen. Auf der Basis einer einfachen bijektiven Zuordnung kann aber auch eine systematische Bündelung vorgenommen werden; wenn die Bündelzeichen darüber hinaus ortsabhängig sind, gelangt man auf diese Weise zu Stellenwertzahlen.

Aufgrund dieser Differenzierung der Anzahlbestimmungen gelangt man zu der Aussage, dass Zahlzeichen, die am Abakus gebildet werden, Stellenwertzahlen sind, wohingegen solche Zahlzeichen, die mit Bündelmaterial z.B. nach Dienes gebildet werden, nur Bündelwertzahlen ohne Stellenwert sind.

Dieses semiotische Zahlverständnis halte ich deshalb für besonders geeignet, den Zahlgebrauch in der Grundschule zu beschreiben, weil es einerseits die Möglichkeit einer exakten Klassifikation von sogen. Anschauungsmaterial zum Zahlbegriff bietet, andererseits jede Veranschaulichung von Zahlen und des Rechnens mit ihnen überflüssig macht. Denn Zahlen werden hier als Zeichen aufgefasst und sind damit bereits anschaulich.

Dieser Sichtwechsel bewirkt eine Entmythologisierung des angeblichen Operierens mit mentalen Konstrukten (die niemand kennt!) und einen Abbau der Überheblichkeit, mit der man „schwachen" Schülern der Gebrauch von Rechenmaterial zugesteht, während die „starken" (im Geiste) solches nicht nötig haben.

3.2 Zur Methodik des Abakus-Rechnens in der Grundschule

Als Abakus bezeichne ich eine endliche aber beliebige Menge gekennzeichneter Orte in linearer Anordnung, denen endliche Mengen gleichartiger Gegenstände so zugeordnet werden, dass folgende Handlungsregel gilt: m_n Gegenstände, die sich an der Stelle n befinden, werden durch einen Gegenstand an der Stelle n+1 ersetzt.

Nach dieser Definition sind neben den historischen Abakusformen auch das Registerspiel von H. Winter sowie der Minicomputer von F. und G. Papy mögliche

Arten des Abakus. Ich selbst habe in der Schule als Abakus einige Teppichflicken mit Streichhölzern, die man auf die Flicken legt, benutzt. Diese Zusammenstellung bezeichne ich als Schulabakus.

Aufgrund der Charakterisierung des Abakus als Stellenwertsystem ist es sinnvoll, ihn erst dann einzusetzen wenn Zahlen als Stellenwertzahlen behandelt werden. Dies geschieht zwar schon im ersten Schuljahr, aber in wesentlich größerem Umfang üblicherweise erst im zweiten. Nach einer gründlichen Einführung der dekadischen Bündelungsregel an diesem Gerät sind die Schüler in der Lage einer Menge von Gegenständen das entsprechende Zahlzeichen am Abakus zuzuordnen. Durch die naheliegende Beschreibung dieser Zahlzeichen mit (geschriebenen) Ziffern klärt sich für Kinder der Aufbau der herkömmlichen Ziffernzahlen im dekadischen Stellenwertsystem. Anhand der üblichen Benennung dieser Ziffernzahlen durch Zahlwörter kann darüber hinaus die Zahlwortsprache hinsichtlich der zugrunde liegenden dekadischen Bündelung analysiert werden, was zu einer Bezeichnung der Abakusfelder als Zig-Feld (herkömmlich Zehner-Feld), Hunderter-Feld usw. Anlass gibt.

Die Addition mehrstelliger Zahlen kann anschließend bequem innerhalb einer Schulstunde allgemein mit Stellenüberschreitung und weit über den üblicherweise geforderten Zahlenraum hinaus eingeführt werden. Zur Vertiefung dieser Handlungsweise bieten sich dann z.B. Aufgaben des Ergänzens an. Eine weitere Anwendung und Vertiefung der Addition ist die Berechnung einfach zu bildender Vielfache einer mehrstelligen Zahl also z.B. des Doppelten oder Dreifachen. Mit diesem Wissen ist es weiterhin für Schüler möglich, die Besonderheit des Verzehnfachens einer Stellenwertzahl zu entdecken und zu begründen. Und aufbauend auf dieses Wissen zum Verzehnfachen einer Zahl können Schüler des zweiten Schuljahres dann auch schon das Elf- oder Zwölffache einer beliebig großen Zahl ermitteln. Weiter gelangt man nach meiner Erfahrung im zweiten Schuljahr noch nicht. Aber damit können diese Schüler bereits Aufgaben inhaltlich verstehen und lösen, die nach herkömmlichem Unterricht erst im vierten Schuljahr und dort zumeist nur in einem Rasterverfahren behandelt werden.

Der Aufbau des Multiplizierens wird im dritten Schuljahr weitergeführt und kommt dort auch bereits zu einem Abschluss. Die Schüler erweitern zunächst ihren Anwendungsbereich des Multiplizierens, indem sie auch *Vielfache* des Zehnfachen dabei verwenden (s. Abb. 1). Die Verwendung des Hundertfachen, Tausendfachen usw. in Analogie zum Zehnfachen fällt dann nicht mehr schwer. Damit können solche Schüler bereits jede Multiplikationsaufgabe, die derzeit in der Grundschule vorkommt, aufgrund ihres inhaltlichen Verständnisses der Stellenwertzahlen und des Multiplizierens lösen. In dem Maße, in dem sie nun noch das Ein-mal-Eins beherrschen, können sie darüber hinaus ihre Berechnung beschleunigen, weil sie damit die Vielfachen des Einfachen, Zehnfachen usw. schneller bestimmen können als durch die ausführliche mehrfache Addition.

Die Entwicklung schriftlicher Formen des Rechnens setzt schon wenige Monate nach der Einführung des Abakus ein. Sobald nämlich die Schüler über Handlungsschemata zum Rechnen am Abakus verfügen, reduzieren sie den konkreten Handlungsaufwand am Abakus von sich aus und machen stattdessen Notizen zu dem, was sie denken. Diese Notizen sind weder bei allen Schülern noch bei einem Schüler über einen längeren Zeitraum hinweg gleich. Es bilden sich aber doch

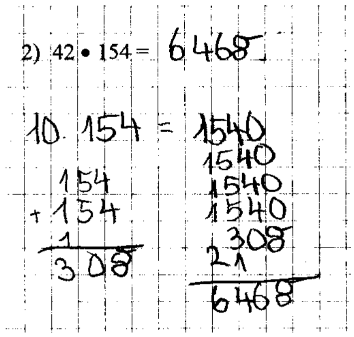


Abbildung 1: *42 × 154*

einige Grundformen heraus, die als vorteilhaft angesehen werden. Solche Grundformen können zu individuell verschiedenen Endformen des schriftlichen Rechnens weiterentwickelt werden (s. Abb. 2, als Beispiel eines „individuellen“ Divisionsverfahrens). Das Verständnis des Rechnens wird dabei allerdings nur erweitert, aber nicht vertieft.

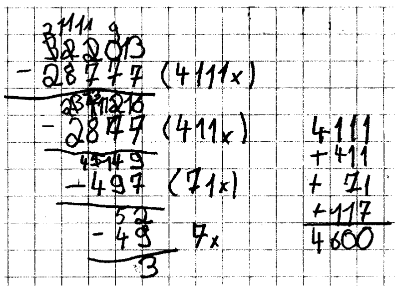


Abbildung 2: *32203* : *7*

Die Subtraktion am Abakus ist – wie schon die Addition – ein Kinderspiel und kann von Schülern des zweiten Schuljahres leicht als Umkehrung der Handlungen beim Addieren selbst abgeleitet werden. Führt man sodann die Division als wiederholte Subtraktion ein, so können die Schüler Divisionsaufgaben (mit Rest!) lösen, die weit außerhalb der Möglichkeiten des herkömmlichen Mathematikunterrichts an Grundschulen liegen. Diese wiederholte Subtraktion wird im nächsten Schritt durch die Verwendung von Vielfachen des Divisors rationalisiert. Ähnlich wie beim Multiplizieren führt dann auch beim Dividieren die Verwendung des Zehnfachen, Hundertfachen usw. schließlich zu brauchbaren Formen des Rechnens, welche die Schüler nach ihren individuellen Fähigkeiten gestalten können.

Eine ausführlichere Behandlung dieser Methodik ist in [4] zu finden.

3.3 Zur Methodik des Bruchrechnens in der Grundschule

Unter einem Bruch will ich ein Zeichen verstehen, durch welches man sich die Vielheit der Portionen einer Teilpartition gegenüber der Vielheit der Portionen der ganzen Partition einer Quantität vergegenwärtigen kann. Dabei meine ich mit „Quantität" eine endliche Menge oder einen Repräsentanten einer Größe und mit „Partition einer Quantität" eine vollständige (eventuell nur gedankliche) Zerlegung dieser Quantität in gleichgroße Portionen und mit der Teilpartition einen (echten) Teil dieser Partition.

Umgangssprachlich kann eine solche Zerlegung einer Quantität in der Form „*n der m Teile von …*" beschrieben werden. Daher ist ein Ausdruck wie „drei der fünf Teile von …" ein Bruchzeichen. Für den Unterricht ist diese Ausdrucksweise günstiger als die übliche Sprechweise („drei Fünftel von …", u.dgl.); denn dieser restringierten Form ist die Bedeutung des Bruchzeichens entschieden schwerer zu entnehmen. Um jedoch den Schreibaufwand bei der Notation solcher Brüche zu reduzieren, ist es von Vorteil, eine abkürzende Schreibweise zu verwenden. Die Schreibweise, die ich selbst im Unterricht benutzt habe, hatte die Form „*n/m von …*" (mit Schrägstrich!); im Vergleich zur gesprochenen Form fehlen hier die beiden Wörter „der" und „Teile", dafür wird ein Schrägstrich „/" als Trennzeichen zwischen den beiden Zahlzeichen notiert. Das Wort „von" habe ich beim schriftlichen Ausdruck beibehalten, um den Zusammenhang zum gesprochenen Ausdruck und damit zur Bedeutung des Bruchzeichens zu betonen. Eine andere Schreibweise für Brüche entwickelte ich im Laufe des Unterrichts bei der Ikonisierung von Handlungen, die zur Partitionierung von Quantitäten durchgeführt werden. Da bei der konkreten Herstellung von einzelnen Portionen sehr oft Behältnisse benutzt werden, bietet sich ein Ikon wie $\cup$ als Zeichen für das Vorkommen einer Portion innerhalb einer Partition an. Damit ist beispielsweise $\boxed{\cup\cup\cup}\,\cup\cup$ mühelos als Bruchikon interpretierbar, welches zu „3/5 von …" synonym ist.

Aufgrund dieser sprachlichen Regelung ist es Kindern im vierten Schuljahr ohne weiteres möglich, die Größe der Bruchteile von Quantitäten zu berechnen, wobei ich unter einem Bruchteil die Vereinigung der einzelnen Portionen einer Teilpartition verstehe. Die entsprechende schriftliche Aufgabenstellung kann in der Form „n/m *von* $X = \boxed{?}$" erfolgen. Der Erweiterung und Festigung dieses Verständnisses von Brüchen dienen Variationen dieser Grundaufgabe:

1. n/m *von* $\boxed{?} = Y$
2. $\boxed{?}\ /\ m$ *von* $X = Y$
3. $n\ /\ \boxed{?}$ *von* $X = Y$.

Alle diese Aufgaben sind ohne Kenntnis der Gleichungslehre durch inhaltliche Überlegungen lösbar und bereiten auch schwächeren Schülern nur geringe Probleme (s. Abb. 3).

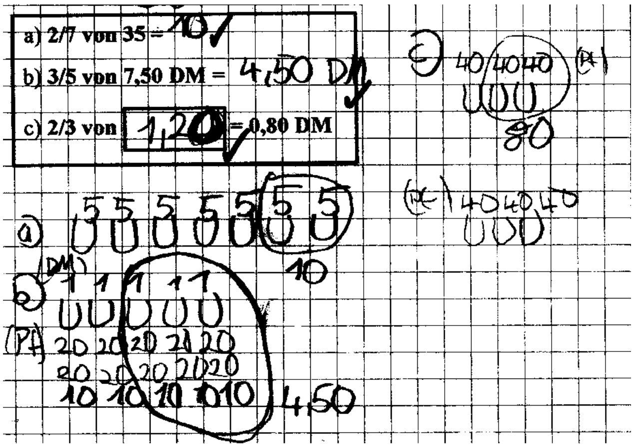


Abbildung 3

Zu einer Vertiefung des Bruchverständnisses im Hinblick auf die Gleichwertigkeit von Brüchen gelangen die Schüler bei der Lösung der folgenden Variation der Grundaufgabe: $\boxed{?} / \boxed{?}$ *von* $X = Y$. Denn während einerseits zwei Bruchzeichen (a/b, c/d), die aus unterschiedlichen Zahlzeichen bestehen ($a \neq c$, $b \neq d$), stets verschieden sind, da sie sich auf unterschiedliche Partitionen einer Quantität beziehen, so stellen Schüler bei der Lösung dieser Aufgabe andererseits auch fest, dass die Anwendung unterschiedlicher Brüche auf eine Quantität sehr wohl zu gleich großen Bruchteilen dieser Quantität führen kann. Dies legt die Möglichkeit des Vergleichs von Brüchen durch Anwendung auf Quantitäten nahe.

Ganz ähnlich wie der Vergleich von Brüchen wird auch die Addition durchgeführt. Aufgrund der Einführung von Brüchen als Operatoren erscheint Schülern die Frage nach der Summe zweier Brüche unsinnig oder zumindest unvollständig. Sie fragen dann nämlich zurück, worauf die Brüche zu beziehen seien. Ist eine Bezugsquantität ausgewählt, dann fällt es ihnen nicht weiter schwer, die Summe der entsprechenden Bruchteile zu bestimmen und als Ergebnis einen zugehörigen Bruch anzugeben. Überlässt man Schülern die freie Wahl der Bezugsquantität, dann erkennen sie schnell, dass manche Quantitäten einfacher zu verwenden sind als andere, und sie finden ebenso schnell Kriterien für eine geeignete Bezugsquantität: Sind a/b und c/d die Brüche, zu denen eine geeignete Quantität gesucht wird, dann muss die Größe dieser Quantität ein Vielfaches der beiden Partitionsgrößen b und d sein. Mit diesem Wissen können Schüler beliebige Brüche addieren und sie stellen dabei fest, dass das Ergebnis von der Bezugsquantität unabhängig ist. Dadurch klärt sich Schülern die Frage nach der Summe zweier Brüche, die sie zunächst für unvollständig hielten, wenn keine Bezugsquantität angegeben war (s. Abb. 4).

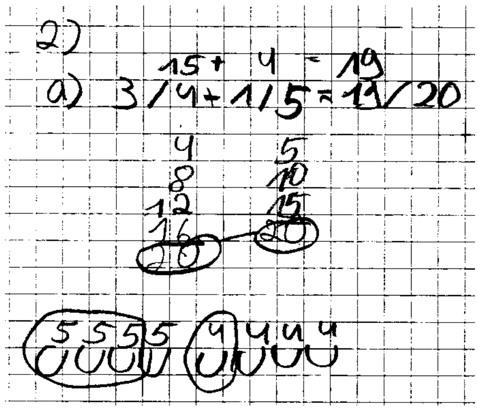


Abbildung 4: *3/4 + 1/5*

Weiter konnte ich die Bruchrechnung in meiner Klasse aus zeitlichen Gründen leider nicht betreiben. M.E. wäre es aber durchaus möglich, auch die Anwendung eines Bruchs auf den Bruchteil einer Quantität in der Grundschule zu behandeln, um so zur herkömmlichen Multiplikation von Brüchen zu gelangen, und die Division wäre gewiss im Sinne des Aufteilens durchführbar.

Es ist jedoch nicht entscheidend, wie weit man das Bruchrechnen in der Grundschule betreibt, sondern dass man die Möglichkeit nutzt, ohne großen Aufwand ein grundlegendes Verständnis für Bruchzahlen zu vermitteln. Die derzeitige Beschränkung auf einfachste konkrete Brüche ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$) steht diesem Verständnis, insbesondere bezüglich der Dezimalzahlen, nur im Wege.

3.4 Zur Methodik der Dezimalzahlen

Einen einfachen Zugang zu Dezimalzahlen und insbesondere zu periodischen Dezimalzahlen ermöglicht die Anwendung von Brüchen auf Stellenwertzahlen am Abakus. Da eine Zahl am Abakus als Sequenz von Quantitäten aufgefasst werden kann, besteht die Aufgabe darin, jede dieser Quantitäten so zu partitionieren, wie es durch den Bruch angezeigt wird. Im Falle eines Stammbruchs $1/n$ führt diese Aufgabe zur üblichen Handlungsweise des Dividierens durch Verteilen (s. Abb. 5). Falls diese Division restlos durchführbar ist, erhält man in jedem Feld des Abakus n Portionen gleicher Größe. D.h. es liegt am Abakus n-mal die gleiche Stellenwertzahl – die Ausgangszahl wurde also in n Teile (additiv) zerlegt. Dies berechtigt uns dazu, jede dieser n Zahlen als $1/n$ der Ausgangszahl zu bezeichnen.

Die Partitionierung der einzelnen Quantitäten am Abakus geschieht zwar nicht immer restlos, doch kann ein eventuell entstehender Rest aus dem jeweiligen Feld entfernt werden, indem man ihn entbündelt – sofern es sich nicht gerade um das niedrigste (erste) Feld handelt. Aufgrund dieses Vorgehens beim Entfernen von

Resten ist es i.Allg. günstiger, mit dem Partitionieren einer Stellenwertzahl an ihrer höchsten Stelle zu beginnen. Man arbeitet so stets nur in einer Richtung an der Zahl und verlagert das Problem des Partitionierens von Resten auf das jeweils niedrigere Feld bis man beim niedrigsten angelangt ist. Die Handlungen müssen in diesem Feld auch dann enden, wenn sich dort ein Rest ergibt, weil rechts daneben kein weiteres Feld mehr vorhanden ist, wohin man diesen Rest entbündeln könnte. Aber ebenso wie man einen Abakus bei Bedarf stets um ein Feld höherer Wertigkeit (nach links) erweitern kann, ist es auch möglich, eine Erweiterung mit niedrigerer Wertigkeit (nach rechts) vorzunehmen. Dies erscheint zwar fragwürdig, weil man gewohnt ist, „Einer“ als kleinste Einheit anzusehen. Doch der Wert eines Steinchens in dem Feld, das rechts neben dem ersten hinzugefügt wird, ist der Bündelungsregel unmittelbar zu entnehmen: Wenn nämlich 10 solcher Steinchen aufgrund dieser Bündelungsregel (im dekadischen System) gleichwertig durch ein Steinchen im ersten Feld ersetzbar sind, dann ist der Wert eines dieser 10 Steinchen 1/10 des Wertes von einem Steinchen im ersten Feld oder 1/10 von 1. Dieser Zusammenhang gilt nicht nur für die hinzugefügten Felder, sondern für jedes Paar benachbarter Felder am Abakus.

Durch die Erweiterung des Abakus nach rechts wird es notwendig, das erste Feld (Einer) eigens zu kennzeichnen, da es sich nicht mehr an der ersten Stelle von rechts befindet. Bei der schriftlichen Notation von Stellenwertzahlen verwendet man dazu ein Komma oder einen Punkt. Am Abakus kann man einen Gegenstand zwischen die entsprechenden Felder legen.

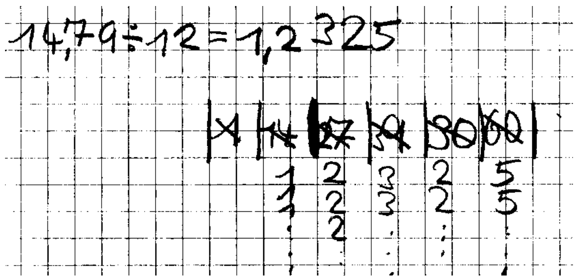


Abbildung 5: *14*, *79* : *12*

Auf der Grundlage dieses Verständnisses von Dezimalbrüchen klärt sich Schülern ihre Verwendung zur Größenangabe. In diesem Fall ist der Wert eines Steinchens im ersten Feld nämlich durch die Maßeinheit eines Größenbereichs bestimmt. Folglich ist der Wert eines Steinchens im Feld rechts daneben 1/10 dieser Maßeinheit. Auf diese Weise können sich Schüler sukzessive die Werte aller Nachkommastellen selbst erschließen. Selbst Zeitangaben in Stunden, Minuten und Sekunden können Kinder in der Grundschule als Stellenwertzahlen verstehen und mit ihnen entsprechend rechnen. Der einzige Unterschied zum üblichen Zehnersystem besteht ja nur darin, dass die Bündelungsregel hier alternierend ist, d.h. es werden abwechselnd 10 bzw. 6 Steinchen zu einem Bündel zusammengefasst. Die Differenz zweier Zeitintervalle (s. Abb. 6) ist so gesehen ebenso leicht zu bestimmen wie die Differenz von zwei dekadischen Zahlen.

Bei Rechnungen zum Größenbereich Geld passen wir den Abakus dem Bündel-

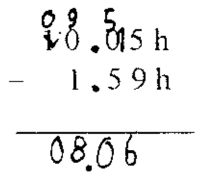


Abbildung 6: *10.05 h − 1.59 h*

system des Geldes (Zweier- und Fünferbündelung) nicht vollständig an, sondern handhaben ihn rein dekadisch. Dabei ist es nebensächlich, ob der Preis einer Ware in D-Mark und Pfennig (Euro und Cent) oder als Dezimalzahl mit (mindestens) dreistelligem Nachkommateil wie bei Benzin angegeben ist – die Rechenhandlungen sind im Wesentlichen gleich. Die Interpretation solcher Rechnungen mit Geld ist in diesen Fällen konkret gar nicht möglich, und dennoch können Grundschüler aufgrund der Handlungen am Abakus den Wert eines fiktiven Geldstücks ermitteln, das in einem solchen Fall der Wert eines Steinchen im dritten Feld hinter dem Komma wäre.

Hat man einmal die Möglichkeit der Erweiterung eines Abakus nach rechts erkannt, dann steht der Fortsetzung des Partitionierens einer Zahl über das erste Feld hinaus nichts mehr im Wege. Ergibt sich also bei der Anwendung eines Bruchs auf eine Zahl am Abakus zunächst ein Rest im ersten Feld (Einer), dann wird dieser Rest (wie üblich) ins Feld rechts daneben entbündelt und das Partitionieren dort fortgesetzt. Das Partitionieren der Zahl endet daher zwangsläufig erst dann, wenn sich kein Rest mehr ergibt. Die Schüler machen in diesem Zusammenhang aber auch die Erfahrung, dass sich bei manchen Rechnungen (z.B. 1/3 von 1) immer wieder ein Rest ergibt – und sie können im Falle periodischer Dezimalbrüche anhand der tatsächlich durchgeführten Rechenhandlungen sogar begründen, weshalb der Rest selbst bei beliebig langer Fortsetzung des Rechenvorgangs niemals verschwinden wird.

Literatur

[1] Breidenbach, Walter, *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen*, Hannover, 1971

[2] Fricke, A., Besuden H., *Mathematik in der Grundschule 4, Lehrerband*, Stuttgart, 1971.

[3] Johann, Michael, *Eine empirische Theorie des Zahlbegriffs*, Frankfurt/Main, 1999

[4] Johann, Michael und Matros, Norbert, *Wechselspiele – Kreatives Rechnen am Schulabakus.* Landau/Pfalz, 2001

[5] Johann, Michael, *Rechnen mit Kopf und Händen*, Manuskript, Landau, 2001.

[6] Matros, Norbert *Abakus-Rechnen in der Grundschule.* In: *Die Schulwarte*, 26 (1973), Heft 8/9, S. 103–121.

[7] Nöth, Winfried, *Handbuch der Semiotik*, Stuttgart, 2000.

[8] Oehl, Wilhelm, *Der Rechenunterricht in der Hauptschule*, Hannover, 1976.

[9] Papy, F., *Les enfants et la mathématique.* Brüssel, 3 Bände (1968/70, 1971, 1972).

[10] Papy, F., *Kinder und Mathematik.* Stuttgart 1973.

[11] Trausch, Gerhard, *Der Minicomputer von Papy im Mathematikunterricht des ersten Schuljahres.* In: *Pädagogische Welt*, 27 (1973), Heft 3, S. 166–173.

[12] Winter, Heinrich, *Neunerregel und Abakus – schieben, denken, rechnen.* In: *Mathematik lehren*, Heft 11 (1985), S. 22–26.

[13] Wittmann, Erich Ch. / Müller, Gerhard N., *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd.1*, Stuttgart, 1993

Dr. phil. Michael Johann
Universität Koblenz-Landau, Abt. Landau
Institut für Mathematik
Im Fort 7
76829 Landau

`www.schulabakus.de`