Michael Johann, Institut für Mathematik der Universität in Landau/Pfalz

Die katalytische Funktion des Abakus beim Lernen des schriftlichen Rechnens

Als „Katalysator“ wird in der Chemie ein Stoff bezeichnet, der eine Steigerung der Reaktionsgeschwindigkeit eines chemischen Prozesses bewirkt und dabei aber nicht in das eigentliche Endprodukt eingebunden wird. Analoge Eigenschaften muss auch Rechenmaterial haben, das im Mathematikunterricht zum Einsatz kommen soll: Es muss den Lernprozess beschleunigen, und es muss so beschaffen sein, dass sich Kinder davon lösen können, nachdem sie angemessen lange damit konkret gerechnet haben. Diese Forderungen erfüllt der Abakus beim Lernen des Rechnens im Stellenwertsystem. Wie ein solches Recheninstrument im Unterricht eingesetzt werden kann, wollen wir hier am Beispiel der schriftlichen Addition und Subtraktion aufzeigen. Für eine ausführlichere Darstellung zum Einsatz des Abakus in der Grundschule verweisen wir auf unser Buch: *„Wechselspiele – Kreatives Rechnen am Schulabakus“* (Beltz-Verlag).

Was ist ein Abakus?

Als Abakus bezeichnet man gewisse, nicht-automatische Rechengeräte, denen ein Stellenwertsystem zugrunde liegt. Die ersten Abakusformen, die uns bekannt sind, stammen aus der Antike. Aber auch heute noch ist der Abakus in vielen Teilen der Welt bekannt und wird dort professionell genutzt (z.B. in Japan, China und Russland). Übrigens ist unsere sog. Rechenmaschine mit 10 x 10 Perlen ursprünglich der russische Abakus – nur verwendet man das Gerät in unseren Schulen meistens nicht als solchen.

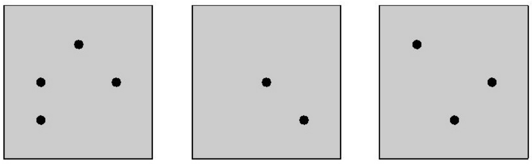
Mit der Verwendung des Abakus’ in der Schule verbinden wir hauptsächlich die Absicht, *Kindern schriftliche Rechenverfahren nicht nur instrumentell, sondern beziehungshaltig verständlich zu machen*. Die Kinder sollten beispielsweise nicht nur wissen, dass man eine Zahl durch „Anhängen einer Null“ verzehnfacht, sondern sie sollten diese Regel auch begründen können. Unser Anliegen ist es also nicht, die Rechengeschwindigkeit zu steigern oder die Berechnung „großer“ Zahlen zu forcieren. Wir verwenden deshalb auch keine der heute üblichen Abakusformen, sondern vielmehr eine stilisierte Form, die ausschließlich didaktischen Zwecken dient. Unsere Absicht betonen wir darüber hinaus durch die Bezeichnung dieser stilisierten Form als *Schulabakus* im Unterschied zu den im kaufmännischen Bereich verwendeten Abakusformen. Wenn wir den Ausdruck „Abakus“ gebrauchen, so ist er immer im Sinne dieses Schulabakus’ zu verstehen, sofern wir nichts anderes sagen.

Zur Herstellung eines Schulabakus benötigen wir nur wenig Material: Wir müssen irgendwie einige Flächen voneinander abgrenzen, und wir brauchen loses Material, das wir auf die abgegrenzten Flächen legen können. Nach unserer Erfahrung eignen sich die folgenden Materialien besonders zur Verwendung als Schulabakus:

- quadratische Teppichflicken (ca. 10cm x 10cm groß) oder Kartonplatten dieser Größe oder DIN A5-Hefte o.ä.
- ca. 100 Holzwürfel (mit 1cm Kantenlänge) oder Streichhölzer oder Bohnen o.ä.

Das Material sollte so beschaffen sein, dass es gut zu greifen ist und nicht leicht wegrutscht oder wegrollt.

Die Teppichflicken legen wir in eine Reihe und bezeichnen sie als *Felder*. Zur Unterscheidung nummerieren wir sie: Das Feld rechts außen erhält die Nummer *1*. Das Feld links neben der *1* erhält die Nummer *2*, und das Feld neben der Nummer *2* erhält die Nummer *3*. Wir beginnen also beim Nummerieren *rechts*. Die Holzwürfel – im folgenden auch *Steinchen* genannt – dienen zur Darstellung von Zahlen auf diesen Feldern.



$\hat{=}$ 423

Abbildung 1: „423“ am Schulabakus

Die Einführungsphase

Der Abakus sollte im Unterricht eingeführt werden, wenn das Bündeln (zu Zehnern) thematisiert wird, also zum Ende des ersten oder zu Beginn des zweiten Schuljahres. Er kann aber selbstverständlich auch zu jedem späteren Zeitpunkt noch eingeführt werden. Im folgenden wollen wir dazu einige bewährte Unterrichtsvorschläge unterbreiten.

Die Handlungsbasis, auf die wir alles Rechnen am Abakus aufbauen,ist die folgende Regel:

Bündelungsregel: Ersetze zehn *Steinchen, die in einem Feld liegen, durch* ein *Steinchen im Feld links daneben.*

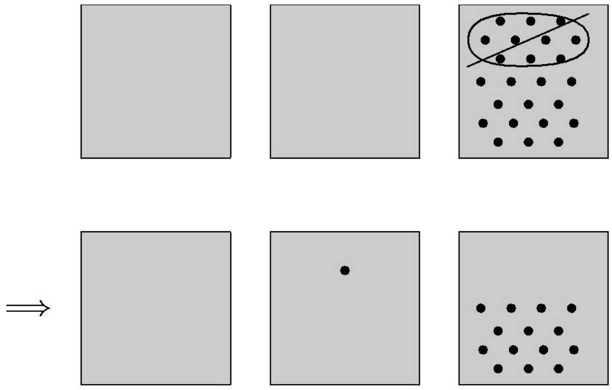


Abbildung 2

Um einem naheliegenden Missverständnis vorzubeugen, sei gleich betont: *Schüler sollen nach dieser Regel* handeln *können – sie aufsagen zu können, ist dagegen eher unbedeutend.* Es ist ein weit verbreiteter Irrtum zu glauben, dass Mathematik eine rein geistige Tätigkeit sei. Dieser Eindruck kann deshalb entstehen, weil es in der Mathematik üblich ist, nur die Ergebnisse einer Arbeit zu präsentieren, aber nicht den Weg dorthin. Der Mathematiker handelt so, als bahnte er sich seinen Weg durch einen Urwald: Er kennt das Ziel, aber er braucht sich nicht den Pfad einzuprägen, auf dem er gekommen ist. Was hinter ihm liegt, kann ruhig wieder überwuchern. Diese Haltung kann sich der Mathematik*lehrer* nicht erlauben. Er muss Wege aufzeigen, auf denen möglichst viele nachfolgen können. Am Beispiel der konkreten Handlungen am Abakus werden wir sehen, wie in jedem Menschen ein Stück weit Mathematik entstehen kann.

Doch wie vermittelt man Schülern nun diese Handlungskompetenz, die durch die Bündelungsregel beschrieben wird? Die Antwort ist denkbar einfach: Indem man's vormacht. Vielleicht verwenden Sie dazu einen Overhead-Projektor. Er ermöglicht allen Schülern dieselbe Perspektive, wohingegen ein Sitzkreis sehr ungünstig ist, weil dabei nur für die Hälfte der Schüler das erste Feld rechts liegt (denselben Zweck erfüllen auch Klett- oder Magnet-Tafel). Grenzen Sie drei Felder auf dem Projektor voneinander ab, indem sie beispielsweise zwei lange Bleistifte hinlegen, und legen Sie in das erste Feld eine Hand voll Steinchen (20 ... 30 Stück). Um die Aufmerksamkeit der Schüler zu steigern, sollten Sie Ihre Handlungen gar nicht kommentieren. Zählen Sie leise zehn Steinchen aus dem ersten Feld ab, legen Sie diese in ein Vorratsgefäß, und nehmen Sie anschließend ein Steinchen aus diesem Gefäß heraus, um es auf das zweite Feld zu legen.

Kann einer Ihrer Schüler an dieser Stelle weitermachen? Wer wird wohl der oder die erste sein, der oder die das kann? Und wie oft kann man diese Handlung durchführen? (So oft, bis weniger als zehn Steinchen im ersten Feld liegen!) Kinder im zweiten oder dritten Schuljahr werden i. Allg. mehrere Anläufe brauchen, ehe sie die Handlung korrekt ausführen. Bis es soweit ist, treten bereits verschiedene Fehler auf:

- Es werden nicht exakt zehn Steinchen aus dem ersten Feld genommen.
- Es werden zwar zehn Steinchen weggenommen, aber diese werden nicht in den Vorrat, sondern in das nächste Feld gelegt.
- Der Schüler nimmt zehn Steinchen aus dem ersten Feld und legt diese in das Vorratsgefäß, aber er versäumt es, ein Steinchen aus dem Gefäß in das zweite Feld zu legen.
- Er nimmt zehn Steinchen aus dem ersten Feld heraus und legt dafür ein Steinchen aus dem Vorrat in dasselbe Feld zurück.
- Der Schüler nimmt nur neun Steinchen aus dem ersten Feld und legt ein Steinchen aus dem Vorrat in das zweite Feld.

Ein Fehler, zu dem *Lehrer* neigen, sei besonders hervorgehoben: Sie legen die zehn Steinchen, die sie aus dem ersten Feld herausgenommen haben, nicht in den Vorrat, sondern separat, um die Zehnerbündel stets vor Augen haben zu können. Das ginge ja noch beim Bündeln vom ersten ins zweite Feld, aber wie steht es beim Bündeln vom zweiten ins dritte Feld? Ein Steinchen, das im zweiten Feld liegt, hat doch einen ganz anderen Wert als eines im ersten! Wir wollen an dieser Stelle gar nicht weiter argumentieren, was zu tun wäre, um die Situation doch noch retten zu können. *Legen Sie zehn Steinchen – egal aus welchem Feld Sie diese herausnehmen – stets in den Vorrat zurück. Das Steinchen, das Sie dafür in das nächste Feld legen, ist vollkommen ausreichend, um festzuhalten, dass einmal zehn Steinchen im Feld davor enthalten waren!*

Nach der Vorführung am Abakus können Sie davon ausgehen, dass einige wenige Schüler korrekt vom ersten ins zweite Feld bündeln können. Es liegt also noch ein weiter Weg vor Ihnen, bis *alle* Schüler korrekt auf *allen* Feldern bündeln können.

Einen kleinen Schritt in diese Richtung können Sie weitergehen, indem Sie die Schüler am jeweils eigenen Abakus das durchführen lassen, was Sie eben am Overhead-Projektor vorgeführt haben. Dabei können Sie gewiss noch ein paar andere Schüler auf den rechten Pfad bringen. Es scheint ohnehin ein Kennzeichen guten Unterrichts zu sein, die Schüler so lange bei guter Laune zu halten (man sagt: zu motivieren), bis auch noch der letzte von ihnen den betreffenden Lerninhalt aufgenommen hat. Während diese Motivationsfunktion im herkömmlichen Mathematikunterricht oft Spielen zukommt, die mit dem Lerninhalt in keinerlei innerer Verbindung stehen, können Sie bei der Einführung des Abakus' auf einige Varianten des Bündelns eingehen, die für die Schüler immer wieder eine neue Herausforderung darstellen, welche aber mit der bereits erworbenen Kompetenz zu meistern sind:

1. Die Schüler sollen alle Steinchen, die sie haben (weniger als 100), auf das erste Feld ihres Abakus legen und anschließend bündeln. Hier tritt das Problem auf, dass sich zunächst keine Steinchen mehr im Vorrat befinden, weshalb manche Schüler meinen, sie könnten auch keine Steinchen ins zweite Feld legen. Das Problem ist aber behoben, sobald die ersten zehn Steinchen aus dem Feld herausgenommen und in den Vorrat gelegt sind: Nun sind wieder genügend Steinchen im Vorrat vorhanden.
2. Den nächst größeren Schritt zur Verallgemeinerung der Bündelungsregel können Sie machen, wenn Sie die Schüler mehr als 100 Steinchen ins erste Feld legen lassen. Denn nun erhält man nach dem Bündeln vom ersten ins zweite Feld mindestens zehn Steinchen im zweiten Feld. Nachdem Sie von vornherein mit drei Feldern gearbeitet haben, fällt es den Kindern nicht schwer zu erahnen, wie es hier weitergeht: Zehn Steinchen im zweiten Feld werden durch ein Steinchen im dritten Feld ersetzt.
3. Es ist mühsam, 100 oder mehr Steinchen ins erste Feld zu legen und zu bündeln. Aber man kann sich vorstellen, dass jemand anderes bereits eine große Anzahl von Steinchen im ersten Feld hatte, und seine Bündelarbeit aus irgendwelchen Gründen nicht zu Ende geführt hat. Können wir das weiterführen?
4. Nehmen Sie sich eine ganze Schulstunde Zeit, um die folgende Bündelungsvariante durchzuführen: Sie bringen mindestens 1000 Steinchen mit, die Sie auf das erste Feld eines Abakus' legen wollen. Dafür brauchen Sie einen Riesen-Abakus,

den Sie mit drei Tischen im Klassensaal realisieren. Stellen Sie diese Tische an eine Wand, so dass für jedes Kind die rechte (bzw. linke) Seite des Abakus' die gleiche ist. Nun kann die ganze Klasse beim Bündeln mithelfen. Da Sie 1000 oder mehr Steinchen auf dem ersten Feld liegen hatten, werden irgendwann zehn oder mehr Steinchen auf dem dritten (letzten!) Feld liegen. Wie an dieser Stelle weiter zu verfahren ist, dafür sind aus der Sicht der Kinder mehrere Strategien denkbar:

- Man nimmt die zehn Steinchen aus dem dritten Feld heraus und legt dafür ein Steinchen ins erste Feld. Man beginnt also wieder von vorne, was zwar mathematisch recht interessant wäre, aber nicht zum Zehnersystem führt.
- Man nimmt die zehn Steinchen aus dem dritten Feld und legt dafür ein Steinchen in das Feld davor. Man geht also rückwärts. (Mathematisch interessant, führt aber nicht zum Zehnersystem.)
- Man nimmt die zehn Steinchen aus dem dritten Feld und legt dafür ein Steinchen auf ein viertes Feld, das man zuvor angebaut hat. Diese Strategie ist mathematisch interessant und führt zum Zehnersystem.

Bei dieser Gelegenheit ist es nicht abwegig sich zu fragen, was denn zu tun sei, wenn zehn Steinchen auf dem angefügten vierten Feld liegen. – Man muss dann eben ein fünftes Feld anfügen. Spätestens hier dürfte in den Schülern etwas geschehen, was einem Dammbruch gleicht: Wenn zehn Steinchen auf dem fünften Feld liegen, dann fügen wir noch ein sechstes an … Wann immer zehn Steinchen auf einem Feld liegen, nehmen wir diese weg und legen dafür eine Steinchen auf das nächste Feld, welches wir nötigenfalls noch hinzufügen.

Die Zifferndarstellung

Die Deutung der uns bekannten Zifferndarstellung von Zahlen, indem wir sie auf den Abakus beziehen, kann wohl als eine der schönsten Perlen des Mathematikunterrichts in der Primarstufe angesehen werden. Für Schüler des ersten Schuljahres sind die Zifferndarstellungen von Zahlen so etwas Ähnliches wie eine geschriebene Form der gesprochenen Zahlwörter. Aber schon die Zahldarstellung „10“ ist nicht einfach nur ein neues Schriftzeichen, denn es ist ein Aufbau aus anderen Zeichen erkennbar. Nun ist dieser Aufbau jedoch ganz anders als der von Worten unserer Schriftsprache, so dass Schüler, die nur über diese naive Vorstellung einer „Zahlenschrift“ verfügen, wohl kaum zu einem angemessenen Verständnis des Stellenwertsystems und der schriftlichen Rechenverfahren gelangen können. Es ist daher ein zentrales Anliegen des Mathematikunterrichts in der Grundschule, den Schülern diesen eigenartigen Aufbau von Zahlen im Zehnersystem zu vermitteln. Sie können dazu folgendermaßen vorgehen: Legen Sie eine handliche Anzahl von Steinchen, z.B. 24, ins erste Feld des Abakus. Ein Schüler sollte die Steinchen nachzählen und auf einer Zahlenkarte, die er unter das erste Feld legt, die Zahl in Ziffern notieren. Lassen Sie nun einen Schüler das Bündeln der Steinchen am Abakus durchführen und anschließend neue Zahlenkarten zu den entsprechenden Feldern schreiben sowie legen. Was daraufhin in den Köpfen der Schüler geschieht, lässt der folgende Dialog ahnen:

Claudia (Schülerin): *Ach! Wenn man diese Karten* (sie zeigt auf die „2“ und die „4“) *zusammenschiebt, dann ist das die Zahl von vorhin* (die „24“).

Lehrer: *Ja, aber das kann doch Zufall sein.*

Felix (Schüler): *Dann probieren wir das noch mit einer anderen Zahl, mit der 27.*

Lisa (Schülerin): *Da stimmt es auch. Das ist bei allen Zahlen so.*

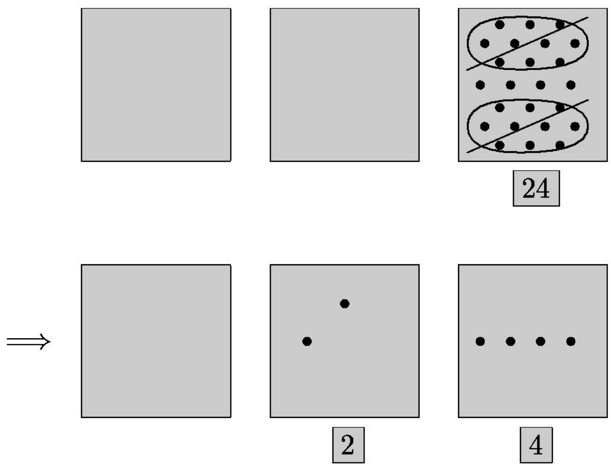


Abbildung 3

Den Schülern offenbart sich hier ein ganz neuartiger Zugang zu den Zahlen, die sie schon zu kennen glauben. Die Zahl „24“ ist nicht nur irgendein Element innerhalb einer geordneten Folge von Ziffernkombinationen. *Diese Zahl kann auch erzeugt werden, indem man systematisch Zehnerbündel am Abakus bildet und die Zif-*

fern den Feldern zuordnet! (Es besteht kein Zweifel, dass die mehrstelligen Ziffernzahlen in Anlehnung an das Abakusrechnen entwickelt worden sind. Es handelte sich historisch nicht um eine willkürliche oder rein syntaktische Fortsetzung von Ziffernkombinationen (was durchaus denkbar wäre). Deshalb kann man u.E. den Abakus bereits im ersten Schuljahr einsetzen, bevor zweistellige Ziffernzahlen auftauchen, um letztere in ihrem Aufbau durch den Abakus verständlich zu machen und allen sog. Zehnerüberschreitungen durch die Bündelungsregel am Abakus jegliche Problematik zu nehmen.) Vergleicht man die Mathematik mit einem antiken Tempel, dann ist diese Erkenntnis wie ein Schritt aus dem Profanum – jenem Bereich, der allen zugänglich und bekannt war – hinein in das Fanum – den Bereich, der nur ausgewählten Personen (Priestern) vorbehalten war – das Allerheiligste.

Die Vertrautheit mit den Bündelungsvorgängen am Abakus sollte bei den Kindern so weit entwickelt werden, dass sie ein vorgegebenes Zahlwort (z.B. „fünfunddreißig“) sofort in die entsprechende Abakuszahl umsetzen können (fünf Steine im ersten und drei Steine im zweiten Feld), wobei sie sich dessen bewusst sein sollen, dass sie hiermit das Ergebnis eines nur gedanklich vollzogenen Bündelungsvorgangs zum Ausdruck bringen. Diese rasche Umsetzung von Zahlwörtern oder Ziffernzahlen in Abakuszahlen ist eine wichtige Voraussetzung für das Rechnen am Abakus.

Die Addition am Abakus

Hohn und Spott über alle,
die die Addition mehrstelliger Zahlen
nicht am Abakus behandeln!

Am Abakus werden zwei Zahlen addiert, indem man beide (am selben Abakus) legt und anschließend, sofern erforderlich, bündelt.

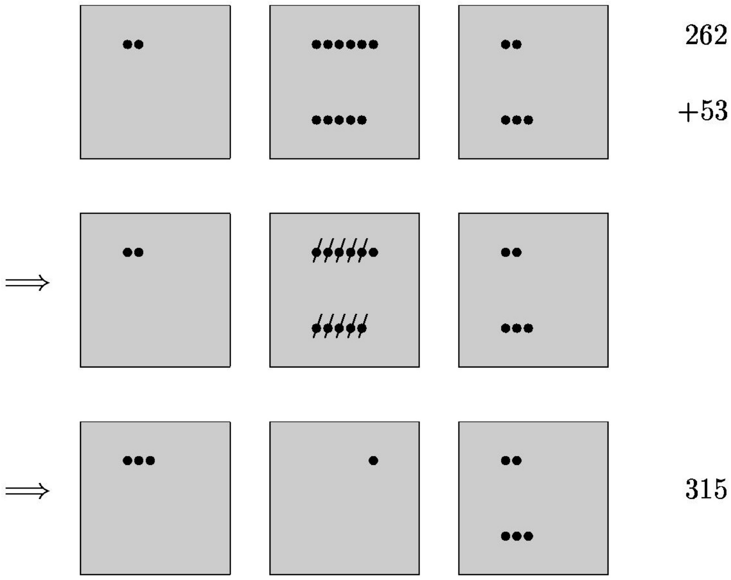


Abbildung 4: $262 + 53 = 315$

Diese Regel bedarf keiner weiteren Begründung. Wenn Sie Zweifel haben, dann prüfen Sie es doch einfach nach: Angenommen, Sie wollten wissen, was die Summe von 24 und 13 ist. Nach der eben genannten Additionsregel legen Sie die beiden Zahlen am Abakus – und schon haben Sie das Ergebnis: 37, sieben Steinchen im ersten Feld und drei im zweiten. Das Ergebnis stimmt also mit dem überein, was Sie auch auf altbekanntem und vertrautem Weg erhalten. Sollten Sie noch immer unsicher sein, dann legen Sie ins erste Feld ihres Abakus ein Häufchen mit 24 Steinchen und dann noch ein weiteres mit 13 Steinchen. Wenn Sie nun in bekannter Weise bündeln, kommen Sie ebenfalls zur Zahl 37. Aber hätten Sie nicht gleich die beiden Zahlen in gebündelter Form legen können? Es ist doch gleich, ob Sie zunächst die entsprechenden Anzahlen von Steinchen ins erste Feld legen und anschließend die *gesamte* Menge bündeln, oder ob sie die Zahlen *gleich* in gebündelter Form hinlegen. Sie können das Bündeln i.Allg. natürlich nicht vermeiden, indem Sie die beiden Summanden in gebündelter Form in die Felder legen. Denn es kommt vor, dass nach dem Legen der beiden Summanden in einem Feld 10 oder noch mehr Steinchen liegen, auch wenn selbstverständlich für jeden einzelnen Summanden nur eine Steinchenanzahl unterhalb der Bündelungsgrenze pro Feld zu legen ist. Man spricht ja in diesem Fall von *Übertrag* oder *Zehnerüberschreitung*. Wenn Sie die Zahlen hingegen nicht in gebündelter Form legen, sondern als zwei Häufchen von Steinchen im ersten Feld, dann fällt Ihnen eine solche Zehnerüberschreitung gar nicht auf, weil Sie ohnehin auf das Bündeln eingestellt sind und die Zerlegungen in Ziffern nicht beachten.

Wenn Sie die herkömmliche Behandlung der Addition (im 2. und 3. Schuljahr) mit unserer Methode am Abakus vergleichen, dann fallen vor allem die beiden folgende Vorteile der Abakus-Methode auf:

1. Die allgemeine Addition mehrstelliger Zahlen (beschränken Sie sich nicht auf zwei- oder dreistellige Zahlen und verwenden Sie auch Zahlen mit unterschiedlicher Stellenzahl (z.B. 5678 + 91) und vielen Überträgen) kann innerhalb einer einzigen Schulstunde eingeführt werden.
2. Das Rechnen mit Steinchen entlastet die Gedächtnisarbeit der Kinder (vielen Kindern bereiten die Sätze des Kleinen 1+1 noch Schwierigkeiten), so dass sie sich auf das Neue an der Addition am Abakus konzentrieren können.

Diese Einfachheit der Addition am Abakus ist das Fundament, auf dem es u.E. möglich wäre, den gegenwärtigen Mathematikunterricht an Grundschulen ab dem zweiten Schuljahr entscheidend zu verbessern. Das sind große Worte, aber auf der Addition fußen Multiplikation und Subtraktion und auf diesen wiederum die Division.

Die Subtraktion am Abakus

Wenn wir die Summe 268 + 123 bilden, indem wir zunächst 268 am Abakus legen, dann 123 und anschließend bündeln, dann können wir auch versuchen, 123 vom Ergebnis 391 wieder wegzunehmen. Wir müssen dazu im ersten Feld 3 Steinchen wegnehmen, im zweiten Feld 2 und im dritten Feld 1 Steinchen. Während das Wegnehmen im zweiten und dritten Feld ohne weiteres möglich ist, liegt im ersten Feld aber nur *ein* Steinchen – wir kommen also nicht umhin, das Zehner-Bündel, das wir beim Addieren im ersten Feld durch ein Steinchen im zweiten Feld ersetzt hatten, wiederherzustellen. Der Rest ist wieder einfach.

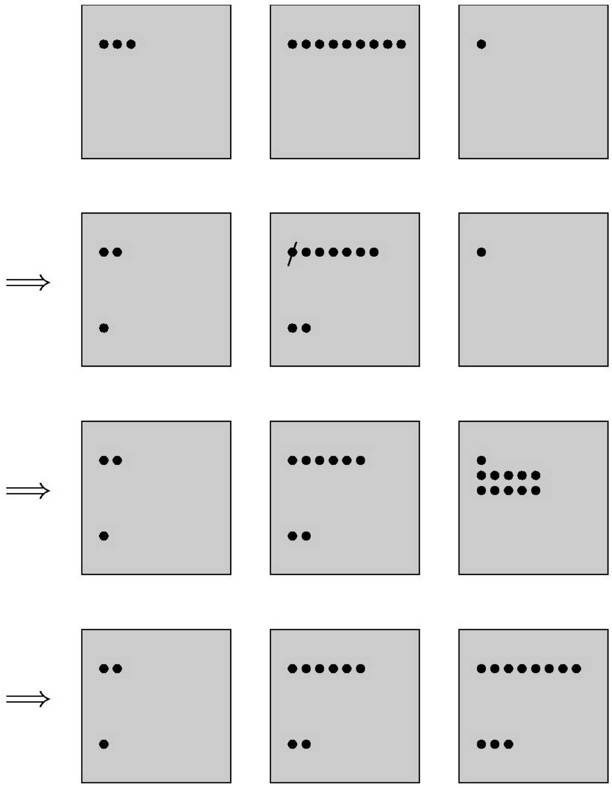


Abbildung 5: $391 - 123 = 268$

Das war bereits eine Subtraktion mit „Zehnerüberschreitung“. Sie könnten mit den Schülern zuvor vielleicht ein oder zwei Aufgaben dieser Art rechnen, bei denen ein Entbündeln nicht erforderlich ist. Jedenfalls kann man mit dem Abakus die Subtraktion allgemein mit und ohne „Zehnerüberschreitungen“ innerhalb *einer* (!) Schulstunde bequem einführen!

Nun haben Sie bei der Einführung der Subtraktion eigentlich nur eine unmittelbar zuvor durchgeführte Addition rückgängig gemacht. Die Schüler wissen dabei möglicherweise noch, welche Steinchen durch eine Zehner-Bündelung in ein Feld gelangt sind, so dass das Entbündeln dieser Steinchen nicht weiter fraglich ist. I.Allg. kennt man bei der Subtraktion die zu entbündelnden Steinchen nicht in dieser Weise. Wie sieht die Situation also aus, wenn wir von *irgendeiner* Zahl eine andere Zahl wegnehmen wollen? – Eigentlich nicht viel anders als zuvor: Entweder wir können in jedem Feld die entsprechende Anzahl Steinchen einfach wegnehmen (dann machen wir das) oder es liegen nicht genügend Steinchen drin, dann entbündeln wir ein

Steinchen aus dem nächst höherwertigen Feld. Mit Ihren Schülern können Sie diese Verallgemeinerung des Subtrahierens spielerisch anpacken: Einer Ihrer Schüler verlässt den Klassensaal, während die anderen Schüler an einem Abakus (z.B. am Overhead-Projektor) zu einer Zahl eine zweite addieren. Dem Schüler, der das nicht beobachten kann, teilt man nur die Zahl mit, die hinzugefügt wurde. Er kann sodann versuchen, diese Zahl von der gegebenen Summe wieder wegzunehmen, um dadurch den anderen Summanden zu finden.

So weit, so gut! Ihre Schüler können nun beliebig große Zahlen voneinander subtrahieren: 7684923 – 23145, 54758 – 987, ... Eine kleine Herausforderung wartet aber noch auf sie: Will man nämlich ein Steinchen aus dem nächst höheren Feld entbündeln, so muss dort selbstverständlich eins vorhanden sein! Überlegen Sie selbst, was Sie tun würden, um beispielsweise die Aufgabe 203 – 64 zu lösen. – Es liegt die Zahl 203 am Abakus; im ersten Feld sind 3 Steinchen. Um 4 wegnehmen zu können, müssten Sie ein Steinchen aus dem nächsten Feld entbündeln. *Dieses Feld ist aber leer!*

Lösung: Sie entbündeln ein Steinchen aus dem übernächsten (dritten) Feld zu 10 Steinchen im zweiten Feld. Jetzt können Sie wiederum eines dieser zehn Steinchen wie gewohnt entbündeln.

Dieses Vorgehen lässt sich leicht auf Zahlen übertragen, bei denen „noch mehr Nullen vorkommen“, wie z.B. 2003 – 64 oder 20003 – 64.

Schriftliches Addieren

Die schriftlichen Verfahren der Addition und Subtraktion werden i.Allg. im dritten Schuljahr eingeführt. Dabei ändert sich auch die äußere Form der Notation einer Rechenaufgabe. Hat der Schüler die beiden Zahlen bislang in einer Zeile von links nach rechts notiert, getrennt durch das entsprechende Rechenzeichen (456 + 78 = …), so werden die Zahlen von nun an stellengleich untereinander notiert.

Diese stellengleiche Notation der beiden Rechenzahlen erscheint im Hinblick auf das Rechnen am Abakus ganz natürlich, weil dort wertgleiche Steinchen im selben Feld liegen. *Unnatürlich* erscheint jedoch der *Zwang*, alle Aufgaben von nun an so zu notieren! Nach unserer Erfahrung haben Schüler, die die Addition und Subtraktion am Abakus beherrschen, keine Probleme damit, eine Rechenaufgabe *in einer Zei-*

le zu notieren und dennoch mit den Ziffern stellengerecht umzugehen. Je mehr Stellen eine Zahl hat, um so mehr besteht selbstverständlich die Gefahr, die Übersicht beim Rechnen zu verlieren und z.B. eine Ziffer an der fünften Stelle zu einer Ziffer an der sechsten Stelle zu addieren. Wir ziehen daraus den Schluss, dass es die Rechnungen mit „großen Zahlen" sind, mit denen wir Schülern verständlich machen können, weshalb es von Vorteil ist, die Rechenzahlen untereinander zu notieren.

Man beginne deshalb die Umstellung auf schriftliches Addieren nicht mit „einfachen" Aufgaben (wenige Stellen und ohne Stellenüberschreitung), weil das für alle Kinder, die am Abakus rechnen können, eine Unterforderung wäre. Überträge sollten in normaler Größe geschrieben werden, weil zum Ersetzen eines Zehnerbündels auch kein kleinerer Stein benutzt wird.

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 7 & 5 & 6 \\ + & & 8 & 7 & 7 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & 3 & 6 & 3 & 3 \end{array} \qquad \text{„\textbf{Additionsform}“} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & 1 \\ + & 2 & 7 & 5 & 6 \\ & & 8 & 7 & 7 \\ \hline & 3 & 6 & 3 & 3 \end{array}$$

Abbildung 6

Schriftliches Subtrahieren

Was wir über die Anordnung der Zahlen beim Addieren gesagt haben, gilt gleichermaßen für das Subtrahieren. Da es jedoch nur *ein* Verfahren für die Summenbildung am Abakus gibt, besteht nur wenig Freiheit bei der Umsetzung der Handlungen in ein schriftliches Protokoll, so dass man nur zu *einem* schriftlichen Additionsverfahren gelangt. Anders ist die Situation bei der Differenzbildung. Wir kennen dazu drei Verfahren am Abakus: das Wegnehmen, das Ergänzen und das Vermindern.

Die Handlungen des Wegnehmens (391 – 123 = ?) und des Verminderns (391 – ? = 123) am Abakus legen eine Notation wie die folgende nahe:

$$\begin{array}{cccc} & & 8 & 11 \\ & 3 & \cancel{9} & \cancel{1} \\ - & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 6 & 8 \end{array} \qquad \text{„\textbf{Wegnehmform}“}$$

Abbildung 7

Wir können der schriftlichen Rechnung alleine nicht ansehen, ob jemand im Sinne des Wegnehmens gerechnet hat (11 – 3 = ?) oder im Sinne des Verminderns (11 – ? = 3). Beide Denkweisen können zu dieser schriftlichen Form führen. Wollte man sie auch in der schriftlichen Form voneinander trennen, müsste man das Vermindern folgendermaßen darstellen:

$$\begin{array}{rrrr} & & 8 & 11 \\ & 3 & \cancel{9} & \cancel{1} \\ - & & & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad \textbf{„Verminderungsform“}$$

Abbildung 8

Aber auch das derzeit geforderte Normalverfahren der Subtraktion kann unmittelbar als schriftliches Protokoll von Handlungen am Abakus interpretiert werden – nämlich als Protokoll der Handlungen beim Ergänzen. Um die Absicht des Ergänzens durch die Aufgabenstellung deutlich anzuzeigen, müsste man korrekterweise folgende Notation wählen: 178 + ? = 295. Bei dieser Art von Aufgabenstellung macht es kaum einem Kind Schwierigkeiten, die Aufgabe am Abakus zu lösen. Es legt als Ausgangszahl 178 und versucht, so viele Steinchen hinzuzufügen, bis es die geforderte Zahl 295 erreicht.

Wir würden demnach am Abakus zu den im ersten Feld liegenden acht Steinchen sieben hinzufügen, so dass wir dort 15 Steinchen hätten. Daraufhin würden wir *zehn*

$$\begin{array}{rrrr} & & 1 & \\ & 1 & 7 & 8 \\ + & & & 7 \\ \hline & 2 & 9 & 5 \end{array} \qquad \textbf{„Ergänzungsform“}$$

Abbildung 9

dieser 15 Steinchen durch *eines* im nächsten Feld ersetzen. Weil sich dadurch die Anzahl der Steinchen im zweiten Feld (7) um eins erhöhen würde, notieren wir eine „1“ an der entsprechenden Stelle.

Diese Notation ist für Kinder sehr gut verständlich, weil sie sich eng an das Geschehen am Abakus anlehnt. Die Notation der Ziffer 1 über 7 protokolliert eine *Zeh-*

nerbündelung und nicht etwa das gleichsinnige Erweitern mit Zehn, das heute in Schulbüchern zumeist verwendet wird.

Es ist für Kinder schwer verständlich, die Wegnehmform mit dem Gedanken des Ergänzens zu verbinden, wie es Lehrpläne verlangen. Weil Kinder spätestens seit dem ersten Schuljahr gewöhnt sind, das Minuszeichen als Symbol für eine Handlung des Wegnehmens zu interpretieren, kann der Gedanke des Ergänzens in der Lehrplanform gegenüber den Kindern nur autoritär und willkürlich gefordert werden. Obwohl für das Kind in dieser Form symbolisiert ist, dass z.B. an der Einerstelle acht von fünf *wegzunehmen* wäre, muss es denken, es solle zu acht so viel *hinzufügen*, dass man fünf erhält. Die zusätzliche Ziffer 1 unter der Ziffer 7 des Subtrahenden lässt sich nicht ohne recht komplizierte Gedankengänge durch den Vorgang des Wegnehmens am Abakus erklären, wobei wir hier nicht an gleichsinniges Erweitern denken, da nur *eine* Zahl am Abakus gelegt wird. Man kann die zusätzliche 1 nur wie bei der *Ergänzungsform* aus der Handlung des Hinzufügens und des sofortigen Bündelns korrekt erklären. Aber die Handlung des Hinzufügens steht im Widerspruch zur Interpretation des Operationszeichens. Wir sprechen uns dafür aus, das Ergänzen sehr ausführlich am Abakus und in der Ergänzungsform schriftlich zu behandeln, plädieren aber dafür, die Lehrplanform dabei nicht zu verwenden, um die Kinder nicht in unnötige Verwirrung zu stürzen.

Anschrift des Autors:
Dr. Michael Johann
Institut für Mathematik
Im Fort 7
76829 Landau