N. Matros (2006)

Gedanken zu Abstraktion und Modellbildung

Das Verstandes- und das Signifikationsvermögen des Menschen werden gemeinhin recht undifferenziert als Abstraktionsvermögen betrachtet. Diese vergröbernde Kennzeichnung gab und gibt zu viel Verwirrung Anlass, weil viel zu viel in einen Topf geworfen wird und im Einzelfall nicht mehr erkannt wird, worum es sich handelt. Unterscheidungen müssen daher getroffen werden; denn einerseits beschränkt sich das Abstraktionsvermögen nicht nur auf das Denken (es gehört zur Mitgift unseres gesamten kognitiven Apparates und beeinflusst auch unser Handeln). Und andererseits fächert es sich phänomenologisch in (mindestens) acht Arten der Abstraktion auf, die wir hier im Hinblick auf den Mathematikunterricht betrachten wollen:

Generalisieren Klassifizieren

Ordnen Analogisieren

Formalisieren Objektivieren

Algorithmisieren Interpretieren

Man könnte meinen, die genannten geistigen Tätigkeiten hätten mit Abstraktion nichts zu tun. Und um in manchen Fällen Klarheit zu schaffen, würde es sich sogar empfehlen, von Abstrahieren nicht zu reden. Weil aber dieser Ausdruck recht undifferenziert gebraucht wird, ist es doch angebracht zu zeigen, was die genannten Denkvorgänge mit Abstraktion zu tun haben.
Jede Art des Abstrahierens vollzieht sich in zwei polaren Gegensätzen: Man *beachtet* etwas und *vernachlässigt* zugleich etwas anderes. Was wir beachten bzw. vernachlässigen, ist kategorial verschieden, und demnach differenzieren sich die Arten der Abstraktion. Dies soll für die genannten acht Arten analysiert werden. Das Abstrahieren ist ein Automatismus unseres Gehirns, der in Funktion tritt oder nicht. Nach wie vor wissen wir nichts über sein Zustandekommen oder über Möglichkeiten, dieses Geschehen persönlich aktiv herbeizuführen. Versuche der Kognitionspsychologie, teilweise Erklärungen hierfür zu liefern, sind noch immer unbefriedigend, um nicht zu sagen, sehr naiv.

(1) Die generalisierende Abstraktion ist die am häufigsten gemeinte, wenn man das Wort „Abstraktion“ verwendet. Sie betrachtet einen konkreten Fall als *Regelfall* und hebt ihn ab von allen Zufälligkeiten. Mit dem Erfassen und Beschreiben der allgemeingültigen Regel wird der konkrete Fall zu einem Spezialfall der Regel. Deshalb stellt man dem Generalisieren auch das Spezifizieren gegenüber. In einer so einfachen Aussage wie „alle erwachsenen Schwäne sind weiß“ steckt eine Regel: Für alle x gilt, wenn x ein erwachsener Schwan ist, dann ist x weiß. Und der einzelne Schwan, dem die alte Rentnerin täglich das Brot von der Teichbank aus zuwirft, ist ein Spezialfall dieser Regel: Dies hier ist ein ausgewachsener Schwan und er ist weiß. Zur generalisierenden Abstraktion gehören alle Arten des Schlußfolgerns: *abduktiv* (Regelerfassung aus einem einzigen Befund: „Wenn dieser Schwan hier weiß ist, dann sind alle Schwäne weiß.“ – Daraus wird: „Wenn etwas ein Schwan ist, dann ist es weiß.“), *induktiv* (Regelerfassung aus mehreren gleichartigen Befunden) und *deduktiv* (aus einer schon vorhandenen Regel wird eine weitere abgeleitet oder ein konkreter

Befund gefolgert). Dass diese Art von Abstraktion häufig zu falschen Regeln führt, mindert nicht ihre Bedeutung für den Menschen. Beispiel: Man legt ein Quadrat mit vier Zündhölzern als Rand. Daneben legt man eines mit 2 Zündhölzern an jeder Seite. Man sieht, dass dieses neue Quadrat viermal so groß ist wie das erste. Wieviel mal so groß wird ein Quadrat sein, das 3 Zündhölzer an jeder Seite hat? Antwort der Kinder (4. Schuljahr) einhellig: sechsmal so groß. Die Kinder haben eine Regel aufgestellt, ohne sie allgemein zu formulieren: Wenn man die Seiten eines Quadrates n-mal so groß macht, wird sein Flächeninhalt 2n-mal so groß. Die Ausführung zeigte, dass die Regel falsch war. Sie wurde korrigiert: Wenn jede Seite x-mal so groß wird, wird der Inhalt (x•x)-mal so groß. – Die generalisierende Abstraktion bildet somit eine wichtige Säule des *Verstehens,* insofern ein *Begründungs-Zusammenhang zwischen zwei Sachverhalten gesetzt wird, der als regelmäßig angenommen wird.* Als zufällig bleibt beim letzten Beispiel außer Betracht: die Art des Randes eines Quadrates, ob das Zündhölzer, Drähte oder Strecken sind; die Lage des Quadrates oder die tatsächliche Länge der Seiten. (Eine zweite Säule des Verstehens bilden *Bedeutungs-Zusammenhänge*, auf die wir später zu sprechen kommen.) Die generalisierende Abstraktion ist so grundlegend, dass man alle anderen Arten als Facetten, als Farbspektrum dieser Abstraktion sehen kann.

(2) Die <u>klassifizierende Abstraktion</u> richtet sich auf *ein bereits generalisiertes Merkmal;* man betrachtet dessen *gleiche* Ausprägung an verschiedenen Gegenständen und sieht ansonsten von ihrer Verschiedenheit ab. Dies geschieht z.B., wenn ein zweijähriges Kind Knöpfe nach der Farbe sortiert oder nach dem Material (aus Glas, aus Horn usw.). Je nach Kombination der Merkmale kann diese Abstraktion weiter oder enger sein, so dass das Sortieren nach einem gröberen oder feineren „Sieb“ erfolgt; z.B. Knöpfe nach Farbe und Anzahl der Löcher („ist rot und hat vier Löcher“ im Unterschied zu „ist rot und hat zwei Löcher“). Diese Abstraktion kann schließlich so eng werden, dass man *individuelle Merkmale*, die für ein einzelnes Individuum kennzeichnend sind, beachtet auf dem Hintergrund der allgemeinen. Man spricht dann auch von „konkretisieren“. Der Zusammenhang mit der generalisierenden Abstraktion ist daran zu sehen, dass man das Sortieren als regelhaftes Geschehen betrachten kann: Wenn X dasselbe Merkmal wie Y hat, kommt X in dieselbe Klasse (z.B. in denselben Behälter) wie Y. Viele Klassifizierungen beruhen auf einer einfachen (vollständigen) Disjunktion, so dass es in diesen Fällen nur zwei Klassen gibt: Entweder ist 17 eine gerade Zahl oder eine ungerade. Entweder ist 17 eine Primzahl oder multiplikativ zusammengesetzt. Betrachtet man jedoch natürliche Zahlen daraufhin, ob der Rest, der bei Division mit 5 bleibt, derselbe ist, so entstehen fünf Klassen: die Zahlen mit Rest 0, die mit Rest 1 (usw.), bis zu jenen mit Rest 4.

(3) Die <u>ordnende Abstraktion</u> baut auf der generalisierenden und klassifizierenden auf, indem sie *unterschiedliche Ausprägungen* eines Merkmals ins Auge fasst und von allem anderen absieht. So kann man Kinder nach ihrer Körpergröße ordnen und dabei von ihrem Alter, ihrem Gewicht, ihrem Geschlecht usw. absehen. Man könnte sie ja auch nach ihrem Alter oder ihrem Gewicht ordnen, aber noch nicht nach der verschieden starken Ausprägung der Geschlechtsmerkmale. Durch die ordnende Abstraktion betrachten wir ein Ding einem anderen gegenüber als *über-* oder *untergeordnet* und bringen dies räumlich oder zeitlich zum Ausdruck, indem wir z.B. Reihenfolgen bilden, die in bestimmter Richtung zu durchlaufen sind: Auf der Hinfahrt kommt Ort X vor Ort Y. Auf der Rückfahrt ist es umgekehrt. Zeitlich ist die Richtung immer dieselbe: Die Dame wird vor dem Herrn begrüßt. Zur ordnenden Abstraktion gehört auch das Systematisieren, das „schwächere“ Aussagen an den Anfang stellt, um „stärkere“ aus ihnen hervorgehen zu lassen. „A folgt aus B“ ist eine Ordnungsrelation.

(4) Die <u>analogisierende Abstraktion</u> achtet auf *besondere Merkmale* in verschiedenen Gegenstands*bereichen* oder *überträgt* sie von einem auf einen anderen, eventuell neu

erzeugten. Ein koreanisches Kind lernte Deutsch in seiner neuen Familie. Wenn es auf die Toilette ging, sagte es: „Muss Klo, Tür auf, Tür zu.“ Aber dann sah sie die Kaffeekanne auf dem Tisch, deutete auf deren Deckel und sagte: „Tür auf, Tür zu.“ Auch Anzahlen sind ursprünglich ein analoger Bereich zu Gesamtheiten wirklicher Dinge, weil in beiden Bereichen nur das Merkmal „Vielheit“ hervorgehoben wird. Darüber sollte man sich durch die Verwendung restringierter Anzahlen nicht täuschen lassen. Eine ungünstige Folge wäre, dass auch das Rechnen nicht als analoges Handeln verstanden wird; tatsächlich jedoch sind Anzahlen ein Modell, in dem so gehandelt wird, dass dies dem Geschehen mit den gezählten Dingen entspricht (semantisches Rechnen). Diese Tatsache wird allerdings durch die Verwendung der indischen Ziffern verdunkelt. Diese sind nämlich wiederum erst durch analogisierende Abstraktion zu Zahlen geworden: Die Merkmale eines Stellenwertsystems wurden vom Abakus auf diese Ziffern übertragen, unter Absehung von allen anderen Merkmalen (z.B. Form, Farbe, Größe der Felder oder Steinchen). Die Analogie geht noch weiter: Das Rechnen in einem Stellenwertsystem reduziert sich auf ein Rechnen im analogen Bereich der Einer. Entscheidend ist demnach, dass dem Kind die analogisierende Abstraktion durch Schaffung geeigneter Anzahlen *ermöglicht* wird, sonst gehen die analogen Beziehungen zur Wirklichkeit verloren. Jede Theorie ist ein analoger Bereich zu einem anderen; Mathematik ist ein facettenreiches *Modell* der Wirklichkeit, ein zur Wirklichkeit analoger Bereich formal-fingierter Objekte.

(5) Die <u>formalisierende Abstraktion</u> wurde von P. Bernays als die eigentlich *mathematische Erkenntnisweise* herausgestellt. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass sie die *„Grenzen für die Möglichkeit einer Verwirklichung“* hinter sich lässt (*Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik,* S. 39 passim), den Dingen Eigenschaften zuschreibt, die diese gar nicht haben bzw. von denen wir niemals wissen können, ob sie sie wirklich haben (z.B. ob etwas kreisrund ist oder dass Zeitspannen an Weglängen gleichmäßig verteilbar seien oder dass die natürlichen Zahlen eine aktual-unendliche Menge seien), und diese Eigenschaften bis zu *formalen Strukturen* fortentwickelt (z.B. die Eigenschaft, dass etwas kreisrund ist, zur Idee des Kreises, bei der es egal ist, *was* diese ideale Eigenschaft hat; *die* Eigenschaft der gleichmäßigen Verteilbarkeit zu proportionalen Funktionen oder die mathematische Beweistheorie zur formalen Logik). Mit der formalen Abstraktion, die man auch als *idealisierende* Abstraktion bezeichnen kann oder als Abstraktion des *praktischen Scheiterns,* ist der Kern des menschlichen Denkens getroffen: Ich weiß, dass es faktisch nicht möglich ist, denke aber, es wäre möglich, bzw. ich denke so, *als ob* es möglich wäre. Das hat an sich nichts mit Selbsttäuschung zu tun, birgt aber die Ursache dafür, dass der Mensch in Lüge und Täuschung geraten kann. (Siehe Statistik, wenn z.B. bei der Aussage, jede Frau in Deutschland habe im Durchschnitt 1,3 Kinder, das Verständnis dafür verloren geht, was „Durchschnitt“ bedeutet, nämlich dass es faktisch nicht so ist.) Bernays (a.a.O., S. 60) machte wohl als erster (modifiziert gegenüber Vaihinger) auf diese Art des Denkens zur Erzeugung von Mathematik aufmerksam; neuerlich wieder Dörfler. Es lässt sich jedoch zeigen, dass dieses Denken zwar notwendig für „mathematische Ideenbildung“ ist, aber nicht hinreichend, weil es nicht auf diese beschränkt ist (s. Tugendhat). Der Mathematiker benutzt Symbole, die für tatsächlich mögliche Operationen eingeführt wurden, auch für formal-fiktive Operationen, die faktisch nicht ausführbar sind, und leistet „an Hand dieser Symbolik“ die formalisierende Abstraktion. Jedoch liegt hier wiederum eine Formalisierung der Symbole vor, die dadurch zustande kommt, dass die formale Abstraktion auf die bisherigen Symbole übergreift. Sonst würden wir die Symbole nicht formal benutzen. In diesem bewussten Übergang kann der Mensch die Andersartigkeit der mathematischen Fachsprache gegenüber der Alltagssprache ohne Entfremdung, ohne Auflehnung oder gar Ablehnung ertragen. Die formale Abstraktion wird schließlich im Argumentieren noch zur formalen Hypothesenbildung fortgesetzt, bei der man gänzlich von der Frage absieht, ob die Ausgangssätze wahr sind. Aber auch das ist *nicht*

charakteristisch für die Mathematik: Wenn sich der Zauberer in eine Maus verwandelt, dann frisst ihn der gestiefelte Kater! Es ist vielmehr so, dass die Mathematik neben allen anderen Abstraktionen vor allem die Fähigkeit der formalen Abstraktion so intensiv und extensiv einsetzt wie keine andere Wissenschaft (was natürlich sehr stark auf die theoretische Physik abfärbt). Und diesen Umstand bezeichnet man in grober Vereinfachung als „mathematisches Denken", als ob es zwei verschiedene Denkmodi gäbe, das Alltagsdenken und das mathematische Denken. Dagegen trat Heymann (S. 224 ff, S. 228 f.) dafür ein, Mathematik als „Verstärker" des Alltagsdenkens zu sehen. Durch die formale Abstraktion leistet die Mathematik eine „idealisierende Annäherung an das Tatsächliche" (Bernays, S. 60), weil zu ihr auch die Loslösung von allem Inhaltlichen gehört. Diese Annäherung ist nur in einem Falle in vollkommener Weise möglich, nämlich bei den *Anzahlen.* Anzahlen sind Zeichen, durch die wir an endlichen Gesamtheiten eine formale Struktur *bestimmen*, nämlich ihre Vielheit. Wenn wir fragen, *wie viele* Äpfel in der Tüte seien, dann ist das eine Frage nach einer formalen Struktur dieser Gesamtheit. Die Abstraktion auf diese Struktur ist notwendig (aber nicht hinreichend) bei der Herstellung oder Verwendung des Zeichens IIIIIII (Stäbchen), sonst ist dieses Zeichen keine Zahl (das gilt für andere Zahlzeichen auch). Diese Abstraktion sollte nicht verwechselt werden mit dem Absehen von jeglicher Beschaffenheit der Objekte, wie sie immer wieder als notwendig für Zahlen behauptet wird. (da werden die Äpfel und die Stäbchen auf wundersame Weise zu abstrakten Einheiten). Die formale Abstraktion wird vielmehr im Zusammenspiel von Realitäts- und Phantasiebewusstsein vollzogen (Tugendhat): *Ich weiß, dass diese Stäbchen keine Äpfel sind, denke aber trotzdem, jedes Stäbchen wäre ein in der Tüte existierender Apfel, und ich handle mit den Stäbchen so, als ob es die Äpfel aus der Tüte wären* (Zusammenhang mit der analogisierenden Abstraktion). Die formale Abstraktion auf die bloße Existenz der Dinge geht nicht so weit, dass von jeglicher Inhaltlichkeit abgesehen wird. Wir müssen wissen und beachten, dass es sich um Äpfel bzw. Stäbchen handelt. Weil sich eine Vielheit nur in einer Hinsicht verändern kann – es werden mehr oder es werden weniger Individuen – kommt mit den Stäbchen (als Zahl) wiederum nur *eine* Handlung und ihre Umkehrung in Betracht (unter Ausschluss aller anderen): Sammeln (= Einzeldinge zu einer Gesamtheit zusammenfassen) und Teilen (= die Kollektion teilweise oder ganz wieder auflösen), ohne die Individuen zu verändern oder gar zu zerstören, also nicht etwa das Essen. Diese beiden Handlungen sind insofern formale Handlungen, als durch sie die Objekte inhaltlich nicht verändert werden. Daher entwickeln sich aus diesen beiden Handlungen die elementaren Rechenoperationen des Addierens und Multiplizierens bzw. des Subtrahierens und Dividierens. Die Erzeugung von Zahlsprachen (als Signifikationsprozess) und die Abgrenzung von Handlungen auf diese Symbole führen dazu, dass man über diese Bereiche in einer neuen Art und Weise *sprechen* muss. Dadurch wurde die Schaffung einer mathematischen Fachsprache eingeleitet. Das Herstellen einer Zahl und das Rechnen haben also ihre Wurzeln im Bilden von Mengen (wozu der Mensch durchaus keine Mengenlehre braucht); hier liegt die Quelle der Mathematik. Aber die Mathematik als Wissenschaft im heutigen Sinne ist längst nicht erreicht; die setzt ein, wenn Anzahlen noch weiter formalisiert werden zu „natürlichen Zahlen" und das Rechnen zu „algebraischen Operationen". Deshalb sollte man vorsichtig sein mit der Behauptung, in der Grundschule werde Mathematik betrieben. Dies ist eine der Schule aufoktroyierte Form von Selbstüberschätzung, die dazu geführt hat, dass sogar das einfache Rechnen den Boden unter den Füßen verloren hat.

(6) Hinzu kommt die *objektivierende Abstraktion,* eine für die Entwicklung von Mathematik ebenfalls wichtige Fähigkeit, weil dabei alle subjektiven, ich-bezogenen Aspekte allmählich ausgeschieden werden und außer Betracht bleiben. Entsprechende Entwicklungsstufen werden im Unterricht sträflich vernachlässigt. Durch sein Handeln stellt der Schüler zunächst *Wirkzusammenhänge* her (ich habe das bewirkt). Diese Wirkzusammenhänge werden als

Begründungszusammenhänge interpretiert (das ist so, weil ich das so gemacht habe; die Wirkung verweist auf die Handlung), zu *hypothetischen Zusammenhängen* formalisiert (wenn ich x tue, dann tritt y ein; die Handlung wird zum Vor-zeichen für die Wirkung) und zu *logischen Implikationen* objektiviert (wenn x, dann y; der Bezug zu einem menschlichen Handlungsträger verschwindet). Bietet man fertige Mathematik dem Schüler dar, wird seine aktive Loslösung von einem persönlichen Eingebundensein nicht erforderlich, weil kein solches zustande kommt. Das heißt aber: Für viele Schüler bleibt die Mathematik ein geistiger Fremdkörper, den es wieder auszuscheiden gilt. Und das geschieht nach Kräften. Die objektivierende Abstraktion ist eine der wichtigsten didaktischen Herausforderungen, weil die Subjektivität des Schülers nicht einfach gewaltsam gebrochen werden darf. Und das gilt ebenfalls nicht nur für die Mathematik. Will ein Schulfach *Bildungsfach* sein, so muss es an einschlägigen, *subjektiven* Erfahrungen des Kindes anknüpfen (oder diese schaffen) und kann sich nicht mit irgendeinem *Vorwissen* oder dergleichen begnügen.

(7) Die *algorithmisierende Abstraktion* ist nicht nur für Mathematik unentbehrlich, sondern auch anderweitig, insbesondere im handwerklichen und künstlerischen Bereich. Ein Algorithmus ist ein Handlungskomplex, der aus einer fixierten Abfolge von Einzelhandlungen besteht und zu einem bestimmten Handlungsziel führt. (Wenn sich ein Geigenbauer nicht genau an eine bewährte Abfolge des Herstellens einer Geigendecke hält, kann er das Produkt am Ende verbrennen.) Entscheidend ist aber die persönliche Beteiligung an der Entwicklung von Algorithmen, das Algorithmisieren, und sei es das Zählen oder das Binden einer Schleife. Hierbei muss ein Basis-Verfahren entworfen werden, das erprobt wird und an dem man sich sozusagen festmacht (Apprehension), sofern es zum Ziel führt. Motive wie „mehr Sicherheit“, „mehr Übersicht“, „geringerer Zeitaufwand“ usw. können Anlass sein, das Basis-Verfahren zu *variieren*, damit man aus den Varianten schließlich eine vermeintlich bessere Vorgehensweise selektieren kann, die im Allgem. eine erhebliche Verkürzung (Abbreviation, Komprehension) gegenüber dem aufwendigeren Basis-Verfahrens ist (z.B. Dividieren größerer Zahlen). Beim sogen. schriftlichen Rechnen werden die Algorithmen (für die Abfolge der Gedanken) zudem noch verbunden mit organisatorischen Vorschriften, wie die Zwischenschritte zu notieren sind, was dem Verstehen des Algorithmus sehr abträglich sein kann, wenn der Schüler nicht selbst am Algorithmisieren beteiligt war. *Die Abstraktion selbst besteht beim Algorithmisieren darin, notwendige Bedingungen des Verfahrens von unnötigen zu trennen und ungeeignet oder unzweckmäßig erscheinende Verfahrensweisen oder –teile auszuscheiden.* Auch dieser Weg ist begleitet von besagten anderen Abstraktionen, insbesondere vom Ordnen, weil für einen Algorithmus die Abfolge der Verfahrensschritte zu fixieren ist. So auch beim einfachen Stück-für-Stück-Vergleich zweier Mengen oder beim Zählen mit Zahlwörtern.

(8) Eine achte Abstraktionsart ist schließlich die *interpretierende Abstraktion*. Sie leistet einerseits die Abhebung eines *Zeichens* von seiner *Bedeutung*, nämlich der zum Zeichen gehörenden Verwendungsregel, und andererseits des Zeichens von der Klasse seiner *Referenzobjekte*. Diese Abstraktion vollziehen wir, wenn wir einem Objekt Bedeutung für ein anderes *geben* und jenes dadurch zu einem Zeichen für dieses machen (Signifikation).
Das Kind lernt viele Gegenstände kennen, indem es mit ihnen etwas tut. So baut es z.B. zu einem Stuhl durch das Sitzen oder Herumschieben ein *Aktionspotential* auf, das zunächst auf einen einzelnen Stuhl bezogen ist, dann auf die Klasse dieser Gegenstände ausgeweitet wird. Wenn nun einem solchen Objekt der Name „Stuhl“ zugesprochen wird, wird durch die Wahrnehmung des Referenzobjektes das Aktionspotential (Sitzgelegenheit) aufgerufen und assoziiert sich zusätzlich mit dem Wort „Stuhl“. Weil das Kind aber mit dem Wort nicht so umgehen kann wie mit dem Referenzobjekt, wandelt sich das Aktionspotential zur *Bedeutung* (bzw. zur Verwendungsregel) des Wortes: Etwas wird „Stuhl“ genannt, wenn es nur zu dem

Zweck hergestellt ist, darauf zu sitzen Das Kind versteht und verwendet das Wort, wenn es das Aktionspotential als seine Bedeutung assoziieren kann: Es kann das Wort *interpretieren.* Dadurch trennt sich das Wort von seinem Referenzobjekt und von seiner Bedeutung.
Wenn kleineren Kindern (2 Jahre) das Bild oder ein Minimodell eines Stuhles (z.B. aus einer Puppenstube) gezeigt wird, so versuchen sie zunächst (unter sichtlicher Anstrengung), das Bild oder das Spielzeug zum Sitzen zu benutzen. Das Kind aktiviert also sein erworbenes Aktionspotential. Nun entsteht in der Regel ein Konflikt: Das Bild passt zwar zum Referenzobjekt (wirklicher, großer Stuhl), und auch das Aktionspotential passt zum Referenzobjekt. Aber das Aktionspotential will nicht zum Bild oder Minimodell passen. Es dauert durchaus einige Zeit, bis das Kind seine Handlungen gegenüber dem Bild aufgibt. Das Aktionspotential wird dann zwar auch weiterhin aufgerufen, aber seine Aktivierung wird (wohl aufgrund der bisherigen negativen Erfahrungen) *gehemmt* bzw. verhindert („inhibiert", sagen die Wissenschaftler).
Neuere Forschungen der Kognitionspsychologie zur Symbolentwicklung bei Kindern kommen zu der Folgerung, dass erst mit dem Auftreten dieser *Inhibition* das Bild oder Minimodell des Stuhles tatsächlich als *Symbol* verstanden wird, das den echten Stuhl nur repräsentiert, aber selber kein Stuhl ist. (J. S. DeLoache: *Wie Kinder in Symbolen denken lernen.* In: Spektrum der Wiss. 4(2006), S. 54 bis 59) Diese Theorie ist noch nicht genügend gut durchdacht. Aus der Tatsache, dass das Kind sein „Stuhl-Aktionspotential" aktiviert, folgt nicht, dass es das, was es (im Bild) wahrnimmt, für einen echten Stuhl hält. Die Forscher meinen: Das Kind müsse sich zwischen einem Ding, damit es zum Symbol wird, und dem Gegenstand, der symbolisiert werden soll, erst eine Beziehung vorstellen. Dagegen: Wenn das nicht schon der Fall wäre, würde das Bild nicht das Aktionspotential auslösen können, da der echte Stuhl nicht zur Hand ist. Man unterstellt nun einfach, dass dies zunächst eine *Identitätsbeziehung* sei, dass also das Kind seine sensorische Empfindung eines Stuhlbildes als Wahrnehmung eines Stuhles interpretiere; es glaube, einen Stuhl vor sich zu sehen. Dagegen: Die Tatsache, dass das Kind sich auf das Bild setzen will oder nach der abgebildeten Lehne greift, liefert keinen Beweis für diese Annahme. Denn diese Aktivitäten stehen nicht im Widerspruch dazu, dass das Kind sich bewusst wäre, ein *Bild* eines Stuhles zu sehen. Anzunehmen, dass dann diese Aktivitäten nicht mehr einsetzen würden, ist falsch. Kinder sitzen noch mit vier Jahren vor ihrem leeren Teller und „löffeln" schon mal Suppe, auf die sie noch warten. Gemäß der psychologischen Annahmen müsste man konsequent meinen, die Kinder würden das Nichts im Teller für Suppe halten (mit Suppe identifizieren), so dass das Löffeln ausgelöst wird. Und wenn sie mit dem nichtigen Löffeln aufhören, müsste man ebenso konsequent annehmen, das Nichts im Teller sei nun für das Kind zum Symbol für die Suppe geworden. Die Theorie funktioniert nicht. Selbst Erwachsene scheuen die Berührung mit dem Bild einer Giftschlange, weil solche Berührung nicht zum Aktionspotential gegenüber einer Kreuzotter gehört. Halten sie deshalb das Bild für eine echte Schlange, weil sie ihm gegenüber genauso reagieren? Erwachsene küssen mitunter auch ein Foto anstelle des Originals. Aber niemand wird ihnen unterstellen, dass für sie das Foto kein Symbol des Geliebten ist. Nein: Dieses Küssen des Bildes ist selbst ein symbolischer Akt und kein echtes Geschehen (mit allen Konsequenzen). Symbolverständnis durch Inhibition eines Aktionspotentials – diese Konstruktion ist unbefriedigend. Wie wäre es, wenn man dem Kleinkind schon etwas mehr Phantasie und echtes Denkvermögen zutraute? *Es weiß, dass das „Gebilde", das es wahrnimmt, trotz gewisser Indizien kein Stuhl ist, denkt aber und handelt damit so, als wäre es ein echter Stuhl.* Warum auch nicht? Das sind dann eben symbolische Ersatzhandlungen, die in jedem Spiel auftreten, und zwar ernsthaft und angestrengt. Genau diese Ersatzhandlungen schmieden das ursprüngliche Aktionspotential zu einem *Bedeutungspotential* um. Wenn das gelungen ist, wird das Spiel reizlos und die Aktivität gehemmt. Das heißt aber nicht, dass erst jetzt das Bild zum Symbol geworden ist, sondern dass das Kind einen höheren Freiheitsgrad in der Interpretation des Symbols erreicht hat:

Während vorher das Bild als solches *über das Aktionspotential* mit dem Referenzobjekt verbunden war, weil das zum Erschließen seiner Bedeutung gehört, wird es jetzt über das *Bedeutungspotential* mit dem Objekt verbunden (die Trias „Zeichen, Referenzobjekt und Bedeutung" spannt sich auf) – und genau das könnte die Beziehung sein, die die Forscher suchen, nämlich eine vom Kind *neu reflektierte* Beziehung, die das Bild aus dem magischen Bewusstsein heraushebt, weil sich das Kind nicht nur des Objektes selbst, sondern eben auch seines Bildes *bemächtigt* hat und nicht mehr von ihm übermächtigt wird. Durch das Bild vergegenwärtigt es sich einen Stuhl unter dem Aspekt, dass man auf ihm sitzen kann oder ihn an verschiedene Stellen rücken kann. Das sind Bedeutungen des Bildes (es gibt noch andere, z.B. eine Stilepoche zu erläutern). Was die Forscher jedoch bei ihrer Theorie völlig außer Acht lassen, ist die Rolle der Sprache. Wenn ein Kind das Wort „Stuhl" versteht und verwendet, dann ist es für das Kind ein Symbol, obwohl das Kind nie und nimmer versucht, sich auf dieses Wort zu setzen, als wäre es ein Stuhl, um nach vergeblichem Bemühen seine Aktivitäten einzustellen.

Diese falsche Sicht der genannten Kognitionspsychologen wäre an sich nicht weiter schlimm, würde sie sich nicht in geradezu gemeingefährlicher Weise fortsetzen. Man glaubt nämlich auch, nachgewiesen zu haben, das Rechnen mit Klötzchen sei *„kontraproduktiv"*, weil das Kind nicht erkennen könne, inwiefern diese Klötzchen und das Handeln mit ihnen Symbole für „abstrakte mathematische Prinzipien" seien. Dass ein Kind das nicht erkennen kann, ist grundsätzlich richtig. Aber es ist ein Fehlschluss zu meinen, deshalb sei das Rechnen mit Papier und Bleistift für Kinder verständlicher, sicherer, schneller, einfacher, und das Klötzchenrechnen demgegenüber kontraproduktiv. Auch wenn es schließlich die Kinder so empfinden und selber äußern. Es ist zutreffend, dass Klötzchen keine Symbole für Zahlen im mathematischen Sinne sein können, wenn man von derartigen Zahlen nichts weiß, was sicher bei Kindern (und nicht nur bei ihnen) der Fall ist. Dasselbe trifft aber auch auf die Ziffern auf dem Papier zu. Auch sie können nicht Symbol für die natürlichen Zahlen sein; diese abstrakten Gebilde sind nämlich jenseits von jedem Stellenwertsystem. Wenn man das nicht weiß, weiß man auch nicht, ob man (abstrahierend) auf dem Wege zur natürlichen Zahl von jeglichem Stellenwertsystem abzusehen hat. Jedoch wird dieses ganze Dilemma nur heraufbeschworen, wenn man meint, erst das, was die Mathematik als Zahl definiert, sei tatsächlich Zahl. Es ist nicht so: Was die Mathematik als Zahlen definiert sind formal-fiktive Objekte unseres Denkens, aber keine ursprünglichen Zahlen. In der Tat hat das Ziffernrechnen (oder gar das angebliche Operieren mit mentalen Konstrukten für Zahlen) mit dem Klötzchenzählen nichts in der Weise zu tun, als würde ersteres über Abstraktionen aus letzterem hervorgehen, weil nämlich das vielgepriesene Ziffernrechnen gar kein Rechnen ist. Und es ist ein Irrtum zu meinen, Kinder würden, wenn sie – um das Beispiel der Psychologin aufzugreifen – bei der Aufgabe 42–17 „von der Vier eine Eins wegnehmen" (borgen), verstanden haben, was sie da zu denken haben. Allein die Ausdruckweise der Forscherin deutet darauf hin, dass auch sie nur weiß, was man da zu *sprechen* hat, um dem Dressurakt Genüge zu tun. Wenn man nämlich von Vier (an der Zehnerstelle) eine Eins (an derselben Stelle) wegnimmt , dann hat man einfach 32 – 17 erreicht, aber nicht das, was man angeblich braucht. Wollte man den Holzweg vermeiden, müsste man zehn als bereits subtrahiert betrachten, also zu 32 – 7 gelangen, und hätte (noch) gar nichts geborgt. Wenn man nun meint, man würde die von Vier gelöste „eine Eins" als zehn Einer der Einerstelle zuschlagen können, so ist das deshalb ein blanker Unsinn, weil man bei den Ziffern nicht weiß, was eigentlich „zehn Einer" sein sollen; die gibt es gar nicht. Man muss ja an der Einerstelle dann statt der Ziffer 2 eine 12 hinschreiben oder die Figur 10 über die 2 schreiben. Und das sollen zehn *Einer* sein? Wollte man aber meinen, das Kind könne nun (nach angeblichem Borgen) zunächst 12 – 7 rechnen, so braucht man wiederum nichts zu borgen, weil einfach 12 von 42 abgespalten wird; außerdem könnte das Kind doch gleich 42 – 7 rechnen oder auch 32 – 7. Wenn es nämlich 12 – 7 = 5 auswendig wissen muss, dann findet es auch 42 – 7 = 35 oder 32

– 7 = 25. Mit dem Borgen wird also eine Handlung angesprochen, die es bei Ziffern überhaupt nicht gibt – abgesehen davon, dass der Ausdruck nicht zutreffend ist. Er ist auch nicht zutreffend für die am Abakus mögliche Handlung des „Resolvierens“ (des Auflösens) eines der vier Steinchen im Zehnerfeld gegen zehn Steinchen im Einerfeld. Wenn man diesen Vorgang an Ziffernzahlen notiert, ist das gar keine *Analogie* zum Abakusgeschehen, sondern einfach eine *symbolische Beschreibung* der Handlung des Resolvierens und Wegnehmens (also des eigentlichen Rechnens). Zu meinen, die Kinder würden ihr Ziffernrechnen aufgrund der „Borge-Dressur“ *verstehen*, ist recht blauäugig. Wenn Klötzchen als Anzahlen, d.h. als Symbole für Vielheiten, verstanden werden (was mit den natürlichen Zahlen der Mathematik noch nichts zu tun hat), dann ist das Rechnen mit ihnen bereits eine symbolische Ersatzhandlung (statt des Handelns mit der Original-Gesamtheit). Eine weitere meta-symbolische Ersatzhandlung ist das Notieren der so gewonnenen Ergebnisse mit Ziffern. Man benutzt also die Ziffern nicht als Rechenmittel – ein weit verbreiteter Irrtum! Sie sind ein Notizmittel für anderweitig gewonnene Rechenergebnisse. Diese gewinnt man durch Klötzchenzählen für den aktuellen Fall immer wieder von Neuem oder man hält diese Ergebnisse in externen oder internen Listen auf Vorrat fest und greift bei Bedarf zu. Da ist von Rechnen nichts mehr zu entdecken, nicht mit Ziffern und schon gar nicht mit Papier und Bleistift. Das Klötzchenrechnen allein ist *produktiv* (insbesondere am Abakus), das organisierte Notieren von Zwischen- und Endergebnissen ist lediglich *reproduktiv*. Und was Psychologen dazu meinen, bläst leider in das Horn der meisten Grundschullehrer und ist didaktisch *kontraproduktiv.* Ein weiteres einfaches Beispiel: Die Verwendungsregel für IIII könnte z.B. sein: Denke, für jedes dieser Stäbchen existiert ein Apfel (in dieser verschlossenen Tüte hier). Die Stäbchen erhalten auf diese Weise die Bedeutung, die Vielheit der Äpfel zu vergegenwärtigen. Die Bedeutung trennt sich vom Zeichen, wenn ich sage: „Durch die Stäbchen vergegenwärtige ich mir (bzw. weiß ich), wie viele Äpfel in der Tüte sind.“ Diese Bedeutung ist so stark, dass man mit IIII die Äpfel vollständig „aufzählen“ kann, ohne sie zu sehen (für dieses Stäbchen existiert ein Apfel, für dieses wiederum einer usw.). Genau darauf beruht auch die Nützlichkeit und Wirksamkeit des Rechnens, weil man solche Zahlen tatsächlich *verändern* kann. Man kann sie also sehr wohl zusammenfügen, auseinandernehmen, verringern, verteilen usw. Wir rechnen ja deshalb, weil wir die Aktivitäten mit den Originalobjekten so lange zurückstellen, bis wir wissen, wie viele Dinge hierhin oder dorthin kommen sollen. Und wir können es im Voraus wissen, wenn wir die Aktivitäten mit den Zahlen (als Symbolen für die Originale) vornehmen. Hier erweist sich die Ansicht der Psychologen, man könne Stäbchen nur dann als Symbole verstehen, wenn man nicht mehr mit ihnen so handelt, als wären es die Referenzobjekte, *als total falsch und gemeingefährlich für den Unterricht*. Sicher: So etwas ist mit Ziffern nicht möglich. Wie wollte man die Äpfel in der Tüte mit dem Zeichen 4 „aufzählen“? Wie wollte man das Zeichen „4“ teilen? *Wie wollten aber diese Psychologen jetzt erklären, inwiefern Ziffern überhaupt Symbole sein können, wenn man meint, ihre Referenzobjekte seien Zahlbegriffe oder Ideen, denen gegenüber kein Mensch ein Aktionspotential aufbauen kann, um es dann gegenüber den Symbolen vergeblich einzusetzen und schließlich zu inhibieren?* Da bleiben eben doch als Referenzobjekte nur so etwas wie Klötzchenzahlen übrig, mit denen man etwas tun kann, was man mit ihren Symbolen (den Ziffern) im Allgemeinen nicht kann und gar nicht erst zu verhindern braucht. Wie will man etwa die Ziffer 4 so halbieren, dass die Ziffer 2 entsteht? Trotzdem haben Ziffern eine Bedeutung, wir verwenden sie ja nach bestimmten Regeln als Zahlen. Warum kann uns das Zeichen „4“ überhaupt mitteilen, wie viele Tiger in einem für uns nicht sichtbaren Zwinger sind? Wir können die Verwendungsregel beschreiben: Schreibe die Folge der Ziffern von „1“ bis „4“ vollständig auf ein Blatt Papier (mit Bleistift) und denke, für jede Ziffer sei ein Tiger im Zwinger. Das geht natürlich noch weiter, sobald wir die *Beschreibung* der allgemeinen Bedingungen einer Verwendungsregel vornehmen (semantisches Definieren). Und mit der abstrahierenden Modifikation der Referenzobjekte eines Zeichens (*was* zähle ich mit ...) wird auch dessen Verwendungsregel modifiziert, was man als Bedeutungs-Änderung oder Bedeutungs-Übertragung bezeichnet (z.B. Maßzahlen, Ordnungszahlen usw.). Schließlich kann auch von jeglicher Bedeutung abgesehen werden, so dass das Zeichen (immer auf dem Hintergrund möglicher Bedeutungsgebung) nach rein syntaktischen Regeln gebraucht wird (wie es bei jeder Sprache der Fall ist). Im Falle der mathematischen Sprache sind die syntaktischen Regeln reine Kompositions- und Ersetzungs-Regeln, nach denen Zeichen verändert und zusammengesetzt werden (z.B. die Regeln zur Erzeugung einer Abakuszahl). Beschreibt man solche syntaktischen Regeln, so ist das ein syntaktisches Definieren. Wenn man die Addition natürlicher Zahlen rekursiv definiert, fragt man eigentlich nicht nach der *Bedeutung* der Zeichen (obwohl das oft so ausgedrückt wird und entsprechende Verwirrung stiftet), sondern nach ihrer *Grammatik*. Wenn man also oberflächlich fragt, was die Zeichenreihe „a teilt b“ bedeutet, so meint man eigentlich, durch welche andere Zeichenreihe man diese ersetzen darf, nämlich durch „es gibt ein n mit nb = a“. Entscheidend ist, dass die syntaktischen Regeln mit den semantischen Regeln eines Zeichens *kompatibel* sind, weil sie im Gebrauch der Zeichen ineinandergreifen. In dem Ausdruck „a teilt b“ hat das Wort „teilt“ überhaupt keine Bedeutung. Wie sollte auch der Buchstabe a den Buchstaben b in irgendeiner Weise teilen? Auch kann dem Ausdruck „3 teilt 12“ nur insofern eine Bedeutung zukommen, als damit gemeint ist, dass 12 Stäbchen in getrennte Portionen mit je drei Stäbchen restlos zerlegt werden können. Im Hinblick auf die Ziffern selbst ist die Aussage dagegen bedeutungslos. Gerade im recht verstandenen Klötzchenrechnen liegt für den Mathematikunterricht die Chance, Rechenregeln bis zu den rationalen Zahlen aus der Semantik der Zeichen zu entwickeln, so dass die Wendung zur Syntax und der Bedeutungsverlust der Zeichen vom Schüler aktiv vollzogen werden können. Wenn ein Lehrer hierbei Bauchschmerzen bekommt, weil er glaubt, die Rechenregeln beweisen zu müssen, hängt er in den Seilen der sogen. algebraischen Zahlbereichserweiterungen fest und ist für didaktisches Handeln gefesselt und geknebelt. Die interpretierende Abstraktion ist also eine weitere wichtige Säule des *Verstehens.*

Die acht Abstraktionsarten stehen (wie sich dies in den Kommentaren gezeigt hat) nicht isoliert nebeneinander; sie wirken zusammen und bilden ein festes Netz, in dem unser Erkennen Beute macht. Das Ineinandergreifen der Abstraktionsarten macht vor allem bei ihrer psychologischen Erforschung größte Probleme.

In oben zitiertem Artikel (von DeLoache) wird auch beschrieben, dass man Kleinkindern einen Wohnraum, in dem sie sich während der Untersuchung befanden, genau im Miniformat nachgebildet zeigte. In diesem Miniraum wurde eine winzige Puppe unter einem Sofakissen versteckt. Das Kind sollte dann eine echte Puppe im wirklichen Wohnraum auffinden. Dreijährige suchten sofort unter dem Sofakissen im Wohnraum, Zweijährige wussten nicht, wohin sie sich wenden sollten. Die Forscher werten das so aus: Für Zweijährige ist der Miniwohnraum noch kein Symbol für den wirklichen Wohnraum geworden, weil sie noch keine Beziehung zwischen beidem herstellen. Jedoch: Was können die Zweijährigen nicht? Sie können die Lokalisierung der Puppe im Miniraum nicht auf den Großraum übertragen; also funktioniert hier die analogisierende Abstraktion noch nicht.

Trotzdem kann für das Kind der Miniraum bereits ein Symbol des Großraums sein – er ist nur noch kein *Modell* des Großraums (Analogie). In *beiden* Räumen kann man ja lokalisierend in gleicher Weise handeln. Wie sollte es unter diesen Umständen möglich sein, durch die Übertragung des Aktionspotentials von einem auf den anderen (und seine nachträgliche Hemmung) *Symbol und Wirklichkeit* zu unterscheiden? Die Erklärung der Psychologen funktioniert auch in diesem Falle nicht. Unter diesem Gesichtspunkt kann nämlich der Großraum genauso gut Symbol für den Miniraum sein wie umgekehrt.

Jedes Modell ist auch ein Symbol, aber nicht jedes Symbol ein Modell. Nur Symbole mit analogem Charakter sind auch Modelle. Das heißt: Ein Symbol S wird dadurch zu einem Modell M für eine andere Wirklichkeit W genau dann, wenn eine Beziehung R_S zwischen den Elementen des Symbols besteht, die Rückschlüsse erlaubt auf eine Beziehung R_W, die zwischen Elementen der Wirklichkeit besteht. Man kann das formal so ausdrücken, dass die Abbildung von S nach W bzgl. zweier Relationen (in S und in W) mindestens ein Homomorphismus sein muss, damit S ein Modell für W sein kann. Beispiel: Aus der Tatsache, dass die Minipuppe im Puppenhaus unter dem Sofakissen des Miniwohnraumes versteckt wird, schließe ich darauf, dass die echte Puppe im großen Wohnzimmer unter dem Sofakissen des echten Wohnraumes verborgen ist. Erst wenn ich diese Folgerung ziehe, wird das Puppenhaus für mich zu einem Modell-Symbol. Das kann auch ein Irrtum sein. Dann geht unsere analogisierende Abstraktion eben in die Irre – und das kann lange dauern. Die Mathematik erkennt nur etwas als Modell an, wenn die Homomorphie- oder Isomorphiebedingungen als solche *nachgewiesen* sind. Aber in der Frage, was als Nachweis zulässig ist, gehen die Meinungen auseinander. Das sind aber nicht der einzigen Unterschiede zu Alltagsmodellen – wir kommen später darauf zurück.

Die Art und Weise, wie Symbole zu Modellen entwickelt werden, ist unterschiedlich. So dient uns ein Spiegelbild als Modell der Wirklichkeit, weil wir mit seiner Hilfe Dinge im Bewegungsraum lokalisieren. Aber wir können in dem reinen Sehraum des Spiegels überhaupt nicht handeln. Vielmehr müssen wir in diesem Falle Handlungs-*Vorstellungen* von einem Raum auf den anderen übertragen. Wenn wir dagegen Steinchenzahlen als Modell für wirkliche Vielheiten verwenden, so können wir in diesem Modell handeln. Wenn wir Ziffernzahlen als Modell verwenden, können wir mit ihnen nicht handeln und dürfen nicht einmal Handlungs-Vorstellungen auf sie übertragen. Wenn daher ein siebenjähriges Kind die Hälfte von „33“ als „3“ bestimmt (indem es einen Trennstrich zwischen die beiden gleichen Ziffern macht), stellt es eine Analogie her, die zu einem falschen Gebrauch des Modells führt. Man muss eben unterschiedliche Klassen von Modellen im Unterricht (und auch in wissenschaftlichen Untersuchungen) sauber trennen.

Da sind zunächst die *mentalen* Modelle zu nennen: *Wahrnehmungsmodelle, Vorstellungsmodelle und Denkmodelle,* die als solche nur im Wahrnehmungs-, Möglichkeits- oder Phantasiebewusstsein des Einzelnen (also subjektiv) entstehen, auch wenn externe Anlässe dafür vorliegen. Als Beispiel für ein Wahrnehmungsmodell nannten wir bereits Spiegelbilder; allerdings müssen wir in diesem Wahrnehmungsbild (wie in allen anderen auch) Relationen vorstellen und denken, um auf solche der Wirklichkeit zu schließen. Ein Zusammenspiel von Wahrnehmungs- und Vorstellungsmodell liegt z.B. vor, wenn wir ein musikalisches Notenbild sehen und uns die Melodie dazu vorstellen (ohne lautes Singen); diese Vorstellung ist ein Modell für das wirklich gesungene Lied. Vorstellungsmodelle entwickeln wir insbesondere, wenn wir bei Strategiespielen Spielzüge „vorausdenken“ oder die Folgen einer Bewegung eines Körpers (sei es unseres eigenen, sei es eines fremden) voraussehen wollen. Ein Denkmodell liegt vor, wenn wir z.B. aufgrund einer Wetterbeobachtung an einer Stelle über eine ganze Region gleichmäßig extrapolieren und denken, es seien in den letzten zwei Stunden 65 Liter Regen auf jeden Quadratmeter der Region gefallen. Diese Extrapolation über eine ganze Region ist weder vorstellbar noch wahrnehmbar, und die Beschreibung ist irreführend, wenn man sie wörtlich nimmt und nicht als Ausdruck eines (phantastischen) Denkmodells versteht. Genauso ist es, wenn der Verbrauch eines Motors mit 5,7 Liter pro 100 km angegeben wird, als ob das Auto den Treibstoff gleichmäßig über die Fahrstrecke verteilen würde. Aber dieses Denkmodell hilft uns, abzuschätzen, wieviel Treibstoff wir für eine vorgesehene Strecke etwa brauchen werden. Zweifellos stehen alle Klassen interner Modelle untereinander in Verbindung. Es gibt für uns keine reinen Denkmodelle, in denen nicht irgendwelche Wahrnehmungs- oder Vorstellungsreste mitspielen würden.

Dazu treten die *objektiven* Modelle, in denen versucht wird, den internen Modellen *Ausdruck* zu verleihen und eine intersubjektive bzw. objektive Verständigung und Kontrolle über sie zu erreichen: *semantische und syntaktische Beschreibungsmodelle* sowie alle *Handlungsmodelle,* die gleichsam eine zentrale Vermittlungsstation bilden zwischen mentalen und objektiven Modellen: *Faktische* Handlungen (die also tatsächlich ausgeführt werden) setzen sich nämlich als *fakultative* Handlungen in Vorstellungsmodellen fort und als *imaginäre* Handlungen (die faktisch unmöglich sind) in Denkmodellen. So muss z.B. das oben genannte Denkmodell, durch die Fahrt des Autos würde der Treibstoff gleichmäßig an die Fahrstrecke verteilt (also ein Geschehen), in ein imaginäres Handlungsmodell umgesetzt werden: Ich denke, ich würde den Treibstoff gleichmäßig an die Wegstrecke verteilen. Beschreibt man dieses Handlungsmodell wiederum semantisch-objektiv, so kommt man auf den Term „x Liter : y km", der sich im Falle zweier konkreter Zahlen für x und y syntaktisch so verändern lässt, dass man schließlich weiß, wieviel das Auto pro 100 km an Treibstoff verbraucht.

Man kann vereinfacht sagen, Mathematik entstehe auf folgende Weise: Zunächst gehen mentale Modelle (z.B. die Vorstellung von Anzahlen) aus faktischen und fakultativen Handlungsmodellen (z.B. Steinchenzahlen) hervor und werden wiederum in imaginäre Handlungsmodelle oder Denkmodelle umgesetzt (z.B. unendliche Fortsetzung der Nachfolgerbildung von Steinchenzahlen). Diese werden objektiv beschrieben, so dass semantische Beschreibungsmodelle entstehen (z.B. Zahlen bei Bolzano). Diese wiederum werden so formalisiert, dass sie nach syntaktischen Regeln verändert werden können, so dass formalisierte syntaktische Beschreibungsmodelle entstehen (z.B. Strichlistenkalkül von Lorenzen), die wir wiederum auf fiktive Objekte unseres Denkens beziehen können (z.B. Dedekinds „schattenhafte Gestalten" oder Brouwers „leere Vielheiten"). Das macht es erklärlich, weshalb Mathematiker hinsichtlich der „Wirklichkeit" ihrer wissenschaftlichen Objekte so schwankend sind.

Hinzu kommt die Komplikation, dass ein und dasselbe Symbol unterschiedlichen Modellcharakter haben kann. Dieser Umstand und die Mittelstellung der Handlungsmodelle macht die Schwierigkeiten aus, die drei Klassen von Modellen als *drei Hauptarten von Realität* (R. HERSH, What is Mathematics, really?) eindeutig voneinander zu trennen.

Mentale Modelle

(Wahrnehmungsmodelle, Vorstellungsmodelle, Denkmodelle)

Handlungsmodelle

(faktisch, fakultativ, imaginär)

Objektive Beschreibungsmodelle

(semantisch, syntaktisch)

Explizite Steinchenzahlen z.B. sind zunächst einmal ein subjektives Handlungsmodell zur Überprüfung von Vielheiten: Sind es gleich viele geblieben oder hat sich an der Vielheit etwas geändert? Solche Steinchenzahlen werden zu einem formal-semantischen Beschreibungsmodell, sofern sie dazu verwendet werden, die Vielheit von Gesamtheiten anderen Personen mitzuteilen; in unserem Kulturbereich ist das leider bis auf die einfachsten Fingerzahlen verarmt (und selbst diese werden noch verunglimpft). Mit Steinchenzahlen kann man aber auch formal handeln analog zu den originalen Vielheiten (zusammenfassen und teilen), so dass Steinchenzahlen sowohl ein (nun erweitertes) Handlungsmodell sind als auch ein (ebenfalls erweitertes) semantisches Beschreibungsmodell, durch das wir mitteilen können, wie sich originale Vielheiten nach gewissen Veränderungen verhalten werden; semantisches Rechnen mit Steinchenzahlen hat diese Doppelfunktion. Steinchenzahlen können auch zu einem syntaktischen Beschreibungsmodell werden (Aggregationszahlen), insofern man den Gedanken an eine Mitteilung von Vielheiten zurückdrängt und nur beachtet, welche gestalthaften Formationen mit ihnen möglich sind: Quadratzahlen, Dreieckszahlen, Rechteckzahlen, gerade/ungerade Zahlen, Primzahlen. Und damit hat Mathematik (als Zahlentheorie) eingesetzt. Abakuszahlen sind ein Handlungsmodell, das zum semantischen wie zum syntaktischen Rechnen benutzt werden kann, weniger gut als Beschreibungsmodell. Dagegen sind unsere Ziffernzahlen ein reines Beschreibungsmodell, ohne jegliche Handlungsmöglichkeit; Ziffernzahlen sind nämlich ursprünglich ein *semantisches* Beschreibungsmodell für Abakuszahlen. Durch den kulturellen Ausfall des Abakus (bzw. sämtlicher Zahlhandlungsmodelle) sind wir heute dazu verführt und geradezu genötigt, in Ziffern nur noch ein syntaktisches Beschreibungsmodell zu sehen; d.h. diese Zeichen sind Objekte, die auf nichts anderes mehr verweisen. Die Folge dieser Abspaltung ist, dass die Veränderung von Ziffernzahlen aus ihnen selbst nicht mehr erklärt werden kann (wenn man nicht auf äußerst umständliche algorithmische Kombinationsregeln zurückgreifen wollte, was sich für die Grundschule keineswegs empfiehlt). Genau das ist das Dilemma eines Rechenunterrichtes, der nicht den Abakus verwendet. Wenn uns nicht bewusst ist, Ziffernzahlen jederzeit als Beschreibung von Abakuszahlen interpretieren zu können, sind sie gar kein Modell mehr. In diesem Umstand sieht man eine didaktisch angeblich willkommene Annäherung an die Zahlen als abstrakte Gebilde, verkennt aber, dass dazu noch etliche Abstraktionsschritte vonnöten sind, für die auch die Mathematik mehr als dreitausend Jahre brauchte. Hier erreicht der Modellbegriff in seiner Ausprägung eine extreme Form: Ziffernzahlen als Modell der natürlichen Zahlen. Für Schulkinder besteht keine Chance, Ziffernzahlen als ein solches Modell zu erfassen, so dass sie für Kinder gar kein Modell sein können, wenn man den Spieß nicht umkehrt und Ziffernzahlen als Metasymbole für Abakuszahlen (und diese wiederum wirklich als Zahlen) anerkennt.

Wie Ziffern als reine Beschreibungsmodelle funktionieren, das erfährt jeder Schüler auch weiterhin, wenn er z.B. gesagt bekommt, wie er zwei Brüche zu dividieren hat. Er wird darauf dressiert, die Ziffern nach einer Regel zu komponieren (stürze und multipliziere), so dass er gar nicht mehr danach fragt, was hierbei die Brüche und die Rechenzeichen bedeuten. Entsprechend negativ sieht dann das Sachrechnen aus. Auch das gesprochene Wort „Baum“ kann ein semantisches Beschreibungsmodell sein oder eine reines. Wir können keine Handlung, die wir am Wort vornehmen, keine Handlungsvorstellung, keinen Denkvorgang (ich reiße einen 40 m hohen Baum mit einer Hand aus dem Boden) vom Wort „Baum“ (ich lasse meine Stimme ersterben) auf die Wirklichkeit eines Baumes übertragen. Und wir können das Wort „Baum“ deklinieren, ohne zu wissen, was es bedeutet. Die Trennung von Bedeutung, Zeichen und Referenzobjekt kann so weit fortschreiten, dass das Zeichen allein übrig bleibt und man davon absieht, dass es eines ist. Das andere Extrem sind Modelle, in denen wir handeln können, die aber so wirklichkeitsgetreu sind, dass wir sie beim Handeln selbst nicht mehr als Modell betrachten (dürfen), sondern als die Wirklichkeit (z.B.

Flugsimulatoren), weil das Modell hinsichtlich seiner Handlungsbeziehungen *isomorph* ist zur nachgebildeten Wirklichkeit mit den in ihr geltenden Handlungsbeziehungen. Für eine Analyse des Modellbegriffs kommt erschwerend hinzu, dass Beschreibungsmodelle einerseits willkürlich gebildet werden können. Das ist heutzutage fast bei allen verbalen Ausdrücken der Umgangssprache der Fall, obwohl viele verbale Ausdrücke in der Frühzeit der Sprachentwicklung eventuell mit Handlungsmodellen gekoppelt (oder gar identisch) waren (z.B. lautliche Nachahmung von Geräuschen, die bei Handlungen entstanden). Die Mathematik dagegen ist heutzutage ein rein syntaktisches Beschreibungsmodell (sogar unterschiedlicher Niveaustufen); allerdings erfährt die Übertreibung des syntaktischen Verhaltens in der Schule dadurch nur eine scheinbare Rechtfertigung. Denn ein reines Beschreibungsmodell kann nur dann verständlich entwickelt werden, wenn es aus semantischen Beschreibungen anderer Modelle hervorgeht. Beispiel: - Wir beschreiben die Lokalisierung eines Objektes in einem *Miniraum* (z.B. einer Puppenküche), in welchem wir handeln können, analog zum Großraum (Beschreibung des Handlungsmodells). – Wir beschreiben eine Lokalisierung im *Spiegelbild des Miniraumes* (Beschreibung eines Seh- und Vorstellungsraumes). – Wir beschreiben eine Lokalisierung im *gezeichneten Bild eines Spiegelbildes des Miniraumes*, bei dem das Bild des Spiegels auf eine sogen. Spiegelgerade reduziert ist (geometrisches Denkmodell niedriger Stufe). – Wir beschreiben eine Lokalisierung im *algebraischen Modell einer Spiegelung als Abbildung* (geometrisches Denkmodell höherer Stufe, z.B. affiner Vektorraum). Aber nicht nur Beschreibungsmodelle sind in sich wieder unterschiedlicher Art; wir wiesen bereits darauf hin, dass dies auch bei Handlungsmodellen der Fall ist. Bei ihnen können wir grob solche mit reduzierten Handlungen von solchen mit nicht reduzierten unterscheiden. Ein Flugsimulator ist ein Modell einer Pilotenkanzel, alle Handlungen und alle (simulierten) Folgen entsprechen denen des wirklichen Flugzeugtyps ohne irgendwelche Einschränkungen hinsichtlich des Flugverhaltens. Dagegen können wir mit Steinchenzahlen für Brötchen nur reduziert handeln. Das hängt mit dem Aspekt zusammen, unter dem die Wirklichkeit im Handlungsmodell simuliert bzw. symbolisiert wird: Ist die Bedeutung des Symbols weit gefasst, so sind die Handlungen geringer reduziert, ist die Bedeutung enger eingeschränkt, sind die Handlungen stärker reduziert.