

Norbert Matros (2006)

Wie kann Mathematik als allgemeinbildendes Schulfach gerechtfertigt werden?

Ich versuche hier, meine Gedanken zu Lernformen und Lerninhalten für den Mathematikunterricht der Grundschule in zwölf kommentierten Grundsätzen zusammenzufassen, um zu zeigen, wie der Mathematikunterricht (auch im Gymnasium) ein Bildungsfach sein könnte.

[I](#), [II](#), [III](#), [IV](#), [V](#), [VI](#), [VII](#), [VIII](#), [IX](#), [X](#), [XI](#), [XII](#)

Präambel:

Mathematik ist eine objektivierte Illusion, ein nicht begrenzbares, nach Möglichkeit logisch stimmiges Gedankenspiel, das entweder auf Brauchbarkeit hin entworfen wird oder dessen Brauchbarkeit sich nachträglich erweisen kann. Die Objekte der Mathematik sind fiktive Formalisierungen gewisser Vorgegebenheiten von Zahl und Raum mitsamt den aus diesen Fiktionen ableitbaren Eigenschaften (Strukturen). Mathematikunterricht wird seiner Aufgabe als Bildungsfach in der Schule nur dann gerecht, wenn er vornehmlich dafür sorgt, dass Kinder und Jugendliche an diesem Gedankenspiel aktiv und kreativ beteiligt werden, damit mathematisches Gedankengut zu ihrem persönlichen geistigen Eigentum wird und nicht als schizoide Entfremdung individuell oder gesellschaftlich verdrängt wird. Insbesondere kann der Mathematikunterricht der Grundschule nur insofern ein Bildungsfach sein, als er Zahl und Raum *in der Vorbereitung auf mathematisches Denken* von Kindern als kulturelle Symbolsysteme nachschaffen lässt, so dass dieselben einer Mathematisierung in der weiterführenden Schule zugänglich werden.

Diese Präambel wird in den folgenden zwölf Abschnitten aufgeschlüsselt und erläutert.

- (I) **Der Mensch existiert als Person in zwei Modalitäten: im Außer-sich-Sein, dem Existenzmodus der *Erwartung*, dem wiederum der Bewusstseinsmodus der „Phantasie“ entspricht, und im Bei-sich-Sein, dem Existenzmodus der *Erfahrung*, dem der Bewusstseinsmodus der „Realität“ entspricht.**

Der Mensch unterscheidet (normalerweise) – unabhängig von irgendwelchen physischen oder metaphysischen Festlegungen – zwischen seinem Phantasie- und seinem Realitätsbewusstsein, zwischen seinen Erwartungen und seinen Erfahrungen. Er kann nämlich seine Erwartungen *bezweifeln und verändern*, seine Erfahrungen nicht. Die kritische Distanzierung von seinen Erwartungen und deren Veränderung aufgrund entgegenstehender Erfahrungen ermöglichen dem Menschen Lernprozesse als *Bildungsprozesse*. Er erwirbt auf diese Weise zweierlei Wissen: Erwartungswissen und Erfahrungswissen. Zum Erwartungswissen gehören vor allem Vermutungen von Regelmäßigkeiten, z.B. das Erfassen von Handlungsregeln durch Nachahmung; zum Erfahrungswissen gehört alles, was als erwartet oder unerwartet *beobachtet* wird, aber auch das sogen. Ich-Bewusstsein („ich weiß, dass ich ... kann“). Unkritische Erwartungen an das eigene Können führen zu Selbstüberschätzung; die Rückkehr zu distanzierterem Ichbewusstsein durch Selbstzweifel wird

als persönliche Krisis erlebt. Vieles deutet darauf hin, dass auch Tiere (z.B. Menschenaffen oder gewisse Vogelarten) zwischen ihren Erwartungen (z.B. Planungen) und ihren Erfahrungen unterscheiden und sogar Ichbewusstsein entwickeln.

(II) **Jegliches Wissen erwirbt der Mensch im Medium einer *Sprache*, in welcher ihm auch seine Existenzmodi *reflektiert* bewusst werden.**

Hierbei sollte man nicht immer nur an die Verbalsprache denken; Gesten, Pantomime, die schriftlichen Symbole der Mathematik (usw.) sind ja auch menschliche Sprachen. Die menschlichen Sprachen unterscheiden sich von jener der Tiere vor allem dadurch, dass der Mensch für sein Wissen *sowohl semantisch als auch syntaktisch veränderliche* Symbole erzeugen kann und darüber hinaus sogar *Symbole für Symbole*. Die menschliche Sprache ist *kein Symbol für Wirklichkeit*, sondern für ein bestimmtes *Wissen* über die Wirklichkeit (ein Weltbild). Deshalb wird durch Sprache *keine Wirklichkeit vermittelt*, sondern allenfalls Wissen über diese Wirklichkeit beim Angesprochenen wachgerufen, sofern es bei ihm bereits in irgendeiner Weise vorhanden ist und er die Sprache kennt. Durch Sprache allein wird auch *kein Wissen vermittelt*, sondern es muss grundsätzlich Sprache *in Verbindung mit Wirklichkeit* dargeboten werden, damit der Angesprochene ursprüngliches Wissen über Wirklichkeit im Medium der Sprache erwerben kann.

Wir nehmen ein Beispiel aus dem Geschichtsunterricht, in dem scheinbar Wissen durch Sprache (und eventuell zusätzliche Bilder) vermittelt wird. Nach einer Stunde über die Reformationsgedanken Luthers schrieb ein Schüler (14 Jahre) folgenden Satz nieder: „Der Lutta schlug im Jahre 1517 mit den 95 dessen an die Kirchentüre von Württemberg.“ Gerne wird so etwas als Beleg für Dummheit gewertet. Es ist jedoch ein Beleg dafür, dass der Schüler die ihm dargebotene Sprache mangels dargebotener Wirklichkeit mit *seinem* Wissen über Wirklichkeit und Sprache unkontrolliert durchdrungen hat. Und selbst wenn ein Schüler die Merksätze korrekt wiedergeben kann, hat er kein Wissen über Wirklichkeit erworben. Das Problem, Geschichtsunterricht zu einem Bildungsfach zu machen, ist noch viel größer als im Falle des Mathematikunterrichts, weil der Schüler nicht in der Lage ist, vergangene Fakten zu erschließen oder die Zuverlässigkeit von Quellen zu beurteilen. Der Geschichtsunterricht nimmt heute seinen Ausgang nicht (oder nicht ausdrücklich) bei der persönlichen Vergangenheit des Schülers und macht gar nicht den Versuch, geschichtliche Fakten in diese einzugliedern. Früher war das zumindest in Lehrplänen verlangt, aber was geschah? Da konnte es passieren, dass im Gymnasium wegen einer Klassenzusammenlegung der Geschichtsunterricht bei Karl V. für die Schüler begann. Die Geschichtslehrerin wunderte sich dann nicht nur darüber, dass die Schüler „Karl der 5.“ schrieben. Dem Schüler bleibt nur das Auswendiglernen von Aussagen (wie Glaubenssätze) und allenfalls die Beurteilung der Stimmigkeit ihrer Zusammenhänge. Im Wesentlichen bleiben es „undiskutierte und undiskutierbare Bekenntnisse“ (Ortega y Gasset), die ihn nicht persönlich berühren.

Ein Paradebeispiel für semantisch und syntaktisch veränderliche Symbole sind die Zahlensprachen. Zahlen sind Symbole für ein bestimmtes Wissen über Wirklichkeit. So können wir z.B. die Finger einer Hand als Symbol dafür verwenden, dass wir wissen, wie viele Arten von platonischen Körpern es gibt. Die Menschheit hat Zahlen in unterschiedlichen Symbol-Sprachen lange vor dem Einsetzen mathematischer Reflexionen erzeugt. Die Unbildung, die der Mathematikunterricht weitgehend hinterlässt, beruht einerseits darauf, dass die Wissens- und Sprachstrukturen, die der Mathematik *vorgelagert* sind, im Unterricht nicht berücksichtigt werden, so dass sich für den Schüler die Fachsprache (bei aller ihr zustehenden Eigenart) nicht in den Organismus der Sprache überhaupt eingliedern kann und deshalb zum geistigen Fremdkörper wird. Andererseits beruht die Unbildung bzgl. Mathematik auf dem Problem zwischenmenschlicher Verständigung im Unterricht und auf

dem Problem des Verstehens überhaupt; aber selbst Verstehensschwierigkeiten beruhen wiederum auf Sprachproblemen (s. GADAMER, Wahrheit und Methode, II, S. 184 ff), die ein Mathematikunterricht unnötig heraufbeschwört, der sich (mitsamt Schulbüchern) hauptsächlich in rudimentären „Sprachfetzen“ ergeht, getragen von der Meinung, es fördere schließlich den Schüler, wenn er solchem Chaos einen Sinn geben muss. Der Grundsatz, dem Schüler nach Möglichkeit nicht alles zu sagen, verkommt zu einem Sprechen in orakelhafter Manier.

- (III) Mit den beiden Modi personaler Existenz sind zwei Grundbestrebungen des Menschen verbunden, die lebensnotwendig, aber subjektive Illusionen sein mögen: (a) Der Mensch strebt nach *Gewissheit*, um bei Änderung der Lebensbedingungen sein Lebensrisiko durch Verbesserung seiner *Voraussicht* in Grenzen zu halten. Dabei bleibt er *der Wahrhaftigkeit verpflichtet* auch dann, wenn er in seinem Streben nach Gewissheit schuldhaft oder unverschuldet scheitert. (b) Der Mensch strebt nach *Glück*. Dieses sucht er in einer Gemeinschaft, die ihm Geborgenheit vermittelt und die es ihm ermöglicht, sich mit anderen zu verständigen und das Verhältnis von Energieaufwand und Erfolg effizienter zu gestalten. Dabei bleibt er zur *Rücksichtnahme auf das Glück anderer verpflichtet*, auch wenn er selbst Einschränkungen hinnehmen muss. Das Paradox, dass der Mensch in diesem zweifachen Streben letztlich immer scheitert, ist nicht aufzulösen, verführt aber den Menschen zu „Betäubungsversuchen“ verschiedenster Art (von der Religion bis zur Zigarette). Deshalb gehört es zur prinzipiellen Bildungsaufgabe der Schule, dass der Schüler *im Lernprozess selbst* (und nicht erst durch Benotung) Erfolge und Erfolglosigkeiten seines Erkenntnis- und Glücksstrebens erfahren und Frustrationstoleranzen aufbauen kann.**

Zu (a): Im Sinne Wittgensteins können wir sagen, der Mensch will wissen, *was der Fall ist, was der Fall war und was der Fall sein wird*. Dabei sortiert er gleichsam instinktiv das, was ihm auffällt, nach *Zufall* und *Regelfall*.

Interpretiert der Mensch einen Befund als Zufall, so wird dennoch durch eine Behauptung dieses Befundes seine Wahrheit unterstellt. Wenn jemand behauptet, dieser Apfel hier ist soeben vom Baum gefallen, so behauptet er implizit die Wahrheit dieses Sachverhaltes: Es ist wahr, dass dieser Apfel hier soeben vom Baum gefallen ist. Und man kann eventuell auch eine Begründung für die Wahrheit (nicht für den Sachverhalt selbst) angeben: Ich habe gesehen, dass dieser Apfel ... Jetzt wird sogar zweierlei behauptet: Es ist wahr, dass ich etwas gesehen habe. Es ist wahr, dass das, was ich gesehen habe, auch der Fall war. Auch zukünftige zufällige Ereignisse lassen sich voraussagen: Dieser Apfel dort am Baum wird in den nächsten fünf Minuten ohne menschliches Zutun herunterfallen. Damit wird auch implizit behauptet, dass sich innerhalb der nächsten fünf Minuten dieser Sachverhalt als wahr erwiesen haben wird; und der Sprecher ist bereit, eventuelle Konsequenzen in Kauf zu nehmen, wenn der Sachverhalt nicht eintritt (z.B. er verliert eine Wette; er hat eine Garantie abgegeben). Wer solches Risiko nicht eingehen oder in Grenzen halten will, schwächt solche Voraussagen im Allgemeinen ab: Ich hoffe stark, dass dieser Apfel dort ... (weil ich z.B. Lust verspüre, einen zu verkosten). Damit wird die Behauptung der zukünftigen Wahrheit des Sachverhaltes subjektiv abgeschwächt; eine Garantie wird nicht abgegeben, eine Wette (wenn überhaupt) nur niedrig angesetzt. Die Wahrscheinlichkeitstheorie versucht einen rational vertretbaren Gradmesser für solche Hoffnung zu finden und ihn der subjektiven Einschätzung ihrer Stärke gegenüber zu stellen. Sie orientiert sich dabei an extremen Grenzfällen, die zwar

im Einzelnen aus Zufällen bestehen, aber im gesamten Kontext als notwendig (oder als faktisch unmöglich) beurteilt werden: Ich werde beim nächsten Wurf eine Zahl zwischen 1 und 6 würfeln (... eine 7 würfeln). Dabei ist es nicht immer einfach, alle möglichen Zufallsbefunde aufzulisten, um das sogen. notwendige Ereignis zu kennen. Es gelingt unter gewissen Voraussetzungen, die Ausprägung der Möglichkeit eines zufälligen Ereignisses zu *messen* und die gewonnene Maßzahl als rationalen Hoffungsgrad (als Wahrscheinlichkeit) zu interpretieren. Die Überlegungen, die zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie geführt haben, galten als sehr „scharfsinnig“, weshalb sie als „stochastisch“ (gr. stochastikos = scharfsinnig) bezeichnet wurden. Weil die Menschen früher (und auch heute vielfach noch) alle zufälligen Ereignisse als undurchschaubares (und sogar willkürliches) oder zornig-reaktives Walten göttlicher Wesen auffassten, versuchten sie diese durch religiöse Rituale günstig zu stimmen, sofern sie davon unglücklich betroffen waren (Beschwörungsrituale, Opfer, Gebete). Heute fühlen sich jedoch viele Menschen mehr der Wahrscheinlichkeit als der Wahrheit verpflichtet und unterliegen so weiteren Möglichkeiten des Aberglaubens.

Interpretiert der Mensch aber einen Befund als *Regelfall*, so heißt das, er erwartet, dass unter gleichen Bedingungen ein gleicher Befund eintreten wird. Die Tendenz zu derartiger Vermutung ist im Menschen offensichtlich stärker angelegt als zur Annahme eines puren Zufalls. Der Zusammenhang zwischen Bedingungen und Befund, also zwei verschiedenen Sachverhalten, wird als Regel formuliert und hat allgemein die Form: Für alle x gilt, wenn $A(x)$, dann $B(x)$. Zum Beispiel vermutet man für alle Äpfel: Wenn ein Apfel verwurmt ist, dann fällt er frühzeitig vom Baum. Es wäre ein Irrtum zu meinen, das sei ja „logisch“. Jede solche Regel ist eine Vermutung. Für keine inhaltliche Regel, die der Mensch jemals aufgestellt hat oder aufstellen wird, hat er absolute Gewissheit. Aber weil er die *Regelmäßigkeit* vermutet, hält er den Inhalt des Folgesatzes für ein notwendiges Ereignis, sofern die Prämissen vorliegen. Wir beachten als Lehrer viel zu wenig, wo solche Regelmäßigkeiten vom Kind erfasst werden müssen, und wundern uns über gewisse Stagnationen. Ein Schulkind (nach der Hälfte des ersten Schuljahres) zählt auf die Frage, wie viele Finger es an seiner Hand habe, immer brav bis „fünf“ und sagt auch das Wort. Man wundert sich, dass es das nicht längst „weiß“ und das Zählen unterlässt. Was ist los?

Erstens: Wenn kein Finger meiner Hand verlorengeht oder hinzukommt, dann bleiben es immer gleich viele. Schon das ist eine *inhaltliche* Regelmäßigkeit (wenn X_1 , dann X_2), die erfasst werden muss, und keine *logische* Regel. Der inhaltliche Zusammenhang wird erfasst, wenn das Kind die Finger aufzählen kann: Daumen, Zeigefinger usw. (Sprüchlein: Das ist der Daumen,...).

Zweitens: Über dieser Regelmäßigkeit muss eine weitere aufgebaut werden, damit das Kind auf das Zählen der Finger verzichten kann. Das geschieht, wenn zur ersten Verkettung zweier Sachverhalte eine neue Sprachhandlung des Kindes tritt: „Eins, zwei, drei, vier, fünf“ (mit Zeigen der Finger nacheinander). Diese Sprachhandlung wird verkürzt beschrieben durch das zuletzt gebrauchte Wort (Bedeutung oder Verwendungsregel des Wortes „fünf“ in der Aussage): „Ich habe fünf Finger“ (X_3). Dies ist der vom Kind erzeugte *dritte Sachverhalt*. Dieser ist vom Kind durch seine Sprachhandlung und seine Beschreibung *bewirkt*. Zwischen den ersten beiden und dem dritten Sachverhalt besteht ein vom Kind erzeugter *Wirkzusammenhang*, also kein naturgesetzlicher Kausalzusammenhang – Mathematik ist keine Naturwissenschaft! Aber genau dieser Wirkzusammenhang (X_1 liegt vor; X_2 folgt daraus; X_3 erzeuge ich als von mir bewirkte Folge von X_2) muss erst einmal vom Kind in einer sekundären Reflexion als solcher erfasst werden: Mit meinen Fingern ist nichts passiert. Es sind gleich viele geblieben. Ich habe bis fünf gezählt.

Drittens: In einer weiteren Reflexion wird dieser Wirkzusammenhang als *Begründungszusammenhang* interpretiert: Ich habe fünf Finger gezählt, weil ich noch alle Finger habe und weil ich korrekt gezählt habe. *Viertens:* Daraus wird ein *Implikationszusammenhang* abgeleitet: Immer wenn meine Finger gleich viele geblieben sind und ich sie korrekt zähle, werde ich notwendigerweise bis „fünf“ kommen. Das Kind erwartet das Gleiche wieder unter gleichen Bedingungen. Es kann jetzt eine *Prognose* aufstellen, *ohne zu handeln*. Es braucht nur die beiden ersten Sachverhalte vorauszusetzen (ich habe noch alle Finger und ich kann korrekt zählen), um vorauszusagen, dass es bei tatsächlichem Zählen bis „fünf“ kommen würde. Dazu gehört natürlich, dass es sich den dritten Sachverhalt (im Zusammenhang mit den ersten beiden) *merkt und sich daran erinnert*. Aber das allein genügt nicht. Der Zusammenhang muss als regelmäßig vermutet werden, so dass das Kind sich zutraut, auf die Handlung zu verzichten, die bislang ausreichend Sicherheit und Geborgenheit geliefert hat. Allein an diesem simplen Beispiel, sieht man, dass die Übergänge des Kindes von Wirkzusammenhängen zu Regelzusammenhängen eine kritische Phase sind, ein Ablösungsprozess, eine Entwöhnung. Der Anschluss an die allgemeine Regel-Form ist folgendermaßen herzustellen: *Für alle Finger einer Hand gilt: Wenn sich am Bestand der Finger meiner Hand von gestern auf heute nichts geändert hat, ich gestern fünf Finger hatte und heute den Fingern die Zahlwörter von „eins“ ab korrekt zusprache, dann würde ich auch jetzt notwendigerweise bis zum Wort „fünf“ kommen (und nicht weiter)*. Die Subjektivität der Implikation ist nicht verschwunden. Und das muss und kann auch nicht sein, weil die Erinnerung als Teil in den Inhalt der Prämisse eingeht. Erst wenn man auf diesen regelhaften Zusammenhang vertraut – er braucht gar nicht formuliert zu werden – kann man auf das Zählen der Finger verzichten. Das Kind hat eine neue Sicherheit gewonnen, die ihm dazu verhilft, auf seine alte Sicherheit (immer wieder zu zählen) zu verzichten. Wenn man diesen Ablösevorgang provozieren will, darf man nicht fragen, wie viele Finger hast du an einer Hand. Sondern man muss das Kind auf seine eigene Erinnerung ansetzen: Wie viele Finger hast du gestern gezählt? Weißt du das noch? („fünf“) – Hast du heute noch genauso viele Finger wie gestern? (ja) Wie weit würdest du heute zählen müssen, wenn du deine Finger zählen würdest? (bis „fünf“) – Willst du es noch einmal probieren? (Ja, liebend gern, Frau Lehrerin, weil du ja noch immer nicht zu wissen scheinst, wie viele Finger ich an einer Hand habe, obwohl du ja genauso viele hast, aber zu faul bist, sie bei dir selber zu zählen!) Das Kind hat einen *Beweis* gefunden für seine Aussage: Ich habe auch heute fünf Finger, selbst wenn ich sie nicht mehr zähle. Ich habe ja noch alle Finger, kann korrekt zählen und weiß, wie weit ich gestern gekommen bin.

Jeder Beweis hängt von anderen Regeln ab, die ebenfalls nur Vermutungen sind. Daran ändert sich nichts, wenn die Bedingung faktisch wahr ist und der Befund auch; trotzdem braucht nicht wahr zu sein, dass der Befund objektiv *immer* (d.h. unabhängig von meiner Wahrnehmung) eintreten wird, wenn die Bedingung erfüllt ist. Die Tatsache, dass sich eine Regel subjektiv immer wieder bewährt, macht sie nicht absolut wahr. Aus diesem allgemeinen Versagen gegenüber Regeln hat der Mensch einen Ausweg gefunden: Er *glaubt* an die absolute Wahrheit gewisser Ausgangsregeln. Den Mathematikern galten früher ihre Axiome als absolute Gewissheiten, über die jeder Mensch verfügt („gemeinsame Einsichten“), sogenannte „erste Wahrheiten“, evident und unbeweisbar. Deshalb glaubte man auch an die absolute Wahrheit mathematisch bewiesener Aussagen. So ist Mathematik leicht als Bildungspool zu rechtfertigen. Obwohl heute Mathematikern klar ist, dass sie nicht auf diesem Glauben bestehen müssen, sondern Axiome als „erste Sätze“ annehmen können, ohne darauf zu reflektieren, ob sie wahr sind, glauben immer noch manche an die Evidenz mathematischer Aussagen und müssen zwangsläufig ihre Zuflucht zu einer Art Illumination nehmen, durch die (vielleicht im Augustinischen Sinne) gewisse Ideen in unserem Gedächtnis wieder aufleuchten. Auch Philosophen wollten erzwingen, dass dem Menschen absolute

Wahrheiten zugänglich seien. Feststeht nur dies, dass mathematische Aussagen *Gültigkeit* haben im Rahmen der Axiome und korrekter Beweise; darüber hinaus ist nichts beweisbar, daher Glaubenssache. Teilt man den Glauben an absolute Wahrheiten nicht, ändert das nichts an der Mathematik; man glaubt dann eben etwas anderes, dass nämlich ihre Sätze nur *relativ* bzw. *hypothetisch* wahr sind. Wozu braucht der Mensch aber Gewissheit (selbst wenn sie nur hypothetisch wäre)? Er ist darauf angewiesen, *Prognosen* aufzustellen, *Voraussicht* (*d.h. Vorsicht*) walten zu lassen, um Risiken, die u.U. sein Leben bedrohen können, zu reduzieren. Dies gelingt nur auf der Grundlage als regelhaft angenommener Zusammenhänge. Wir machen heute die schmerzliche Erfahrung, dass aus Unkenntnis regelhafter Zusammenhänge (oder durch Missbrauch ihrer Kenntnis aus Profitgier) die Lebensgrundlagen des Menschen zerstört werden und dass Politiker durch relative Gewissheiten einerseits sich nicht zu entsprechenden Reaktionen veranlasst sehen, andererseits sie weidlich dahingehend nützen, um gewissen „Mächten“ und vor allem sich selbst mit den Konsequenzen nicht auf die Füße zu treten (siehe z.B. Feinstaubverordnungen).

Zu (b): Hinzu kommt, dass der Mensch nicht nur lebensbedrohliche Risiken zu vermeiden trachtet (außer er will nicht mehr leben, z.B. zugunsten eines anderen); sondern auch seine Lebensenergie *effizient* einsetzt, um das Verhältnis von Aufwand und Erfolg zu verbessern bzw. ausgewogen zu gestalten. In solcher Ausgewogenheit findet sich der Mensch geborgen und sicher. Das Streben nach Ausgewogenheit kommt natürlicherweise im rhythmischen Wechsel von Schlafen (geringster Energieverbrauch) und Wachen (hoher Energieverbrauch) zum Vorschein, bzw. im Wechsel von Ruhe und Anstrengung. Jede Art von Gewohnheit (bis zur Automatisierung) geht auf dieses Effizienzstreben zurück. Darüber hinaus versucht der Mensch, auf allen Gebieten, auf denen er über längere Zeit oder immer wieder tätig sein muss, *Fertigkeiten* zu entwickeln, die ihm gewährleisten, bei möglichst geringem Energieaufwand einen möglichst großen Erfolg zu haben. Das Variieren von Basis-Verfahren und das Aussondern unnötiger oder unzweckmäßiger Bestandteile in seinen Handlungen ermöglichen die Entwicklung von Fertigkeiten, so dass diese unter Umständen bis zur routinemäßigen Virtuosität und Meisterschaft gesteigert werden können. In diese Entwicklung ist auch einbezogen das Erfinden, Erproben und Pflegen von Kult- und Gebrauchsgegenständen, von Instrumenten und Werkzeugen, durch die sich der Mensch seine körperlichen oder geistigen Arbeiten erleichtert. Aber wie der Glaube an absolute Wahrheiten, so ist auch der Glaube an absolutes Glück, an absolute Effizienz, an ein *konstant-optimales* Verhältnis von Energieaufwand und Erfolg, ein Aberglaube, wie jeglicher technische Fortschritt beweist. Dieser Aberglaube bringt sogar die absurdesten Geschäftemachereien hervor (z.B. Einfrieren des Leichnams, bis die medizinische Technik so weit sein werde, ihn wieder ins Leben zurückzurufen).

Beispiel: Wenn sich der Mensch vergewissern will, dass in einer Ansammlung von Objekten nach einer Zeit des Unbeaufsichtigteins noch genau so viele da sind wie vorher da waren, dann muss er sich irgendwie *merken*, wie viele da sind. Entweder kann er sich an die Individuen erinnern oder er handelt so, dass er zu der Ansammlung eine Vergleichs-Vielheit *erwirkt* (z.B. für jedes Objekt ein Steinchen in einen Behälter legt). Dadurch erzeugt er eine Zahl, die ihm die Kontrolle über die ursprüngliche Vielheit ermöglicht. Die Entstehung von Zahlen entspringt also unter einem ganz bestimmten Gesichtspunkt dem Streben nach Gewissheit; sie ist ein Aspekt dieses Strebens. Damit aber nicht genug: Diese neuartigen Zeichen versucht der Mensch allmählich so effizient wie möglich zu gestalten. Um nicht eine allzu große Ansammlung an kugelförmigen Steinchen (als Zahl) aufbewahren zu müssen, ersetzt er z.B. so viele kugelige Steinchen, wie er Finger an beiden Händen hat, durch jeweils einen zylindrischen Stein usw. Das verringert den Aufwand an Material und verschafft größere Sicherheit. Das Regelwerk des dekadischen Bündelungssystem ist dem Streben des Menschen nach Geborgenheit und Effizienz entsprungen. Genau diese Lebenssituationen sind

zu klären, wenn man Kinder an der Regelwerk des dekadischen Stellenwertsystems heranführen will. Zahlen und ihre restringierten Formen haben ursprünglich mit der Mathematik als Wissenschaft nichts zu tun. Daher sind Zählen und Rechnen auch keine mathematischen Kompetenzen.

(IV) Der Mensch strebt nach Gewissheit und Glück, indem er – unbewusst oder bewusst gesteuert – seine Merk- und Werkfähigkeiten *aktiviert* (sensorisch-motorischer Apparat), die so ermittelten Daten in Vorstellung und Denken bewusst oder unbewusst *abstrahiert* (ratiomorph-rationaler Apparat) und die auf diese Weise entstandenen Sachverhalte mit überkommenen oder neu geschaffenen Sprachmitteln *beschreibt* (signativ-lingualer Apparat). Darin gründet die Fähigkeit des Menschen *zu verstehen, gezielt zu handeln und sich zu verständigen*. Damit verbunden ist aber auch das Wissen, dass er *selbst* es ist, der „weiß, wohin etwas gehört“ (also versteht), der „weiß, was er will und kann“ (also gezielt – vermeintlich frei – handelt) und der „weiß, was er denkt und sagt“ (sich bewusst verständigt).

Zusammenfassend wollen wir vom „kognitiven Apparat“ sprechen, der auch das Selbstbewusstsein einschließt. In diesen von Natur (d.h. genetisch) vorgegebenen „Apparat“ können wir hinsichtlich seiner Funktionsweise nicht eingreifen. Wir können nicht lernen zu gehen oder zu verallgemeinern oder ein Symbol als solches zu verstehen, und wir können es auch nicht lehren. Wir sind hier auf die Funktion eines intakten Gehirns angewiesen und verlassen uns auch darauf (unter Umständen zu unserem Schaden). Die Klieme-Experten ignorieren jedoch eine solche „Natur“ ausdrücklich und berufen sich dabei zu Unrecht auf die Aufklärung. Was Fichte behauptet hat („Das Ich setzt sich selbst.“), erweist sich immer mehr als ein Automatismus unseres Gehirns und dürfte nur scheinbar eine persönliche Kompetenz sein. Es sind keine persönlichen Lernprozesse und daher auch keine Bildungsprozesse. Das Verstehen dagegen ist ein Bildungsprozess. Es beginnt damit, dass man weiß, *wo man selbst steht, wo man selbst hingehört*. Und es erstreckt sich schließlich auf alle Sachverhalte, sofern man sie in einem Bezugssystem, bestehend aus anderen und vor allem „ersten Sachverhalten“ (Prinzipien), zu „*orten*“ weiß. Nicht von ungefähr bezeichneten die Griechen der Antike das Unverständliche und Unverstandene als *atopon* (das Ortlose).

(V) Das Abstrahieren ist kein einheitlicher Vorgang, sondern von höchst vielfältiger Art. Der Mensch kann nicht lernen zu abstrahieren; er kann diese Fähigkeiten nicht gezielt erwerben. Gezielt erworben werden nur kognitive *Sachverhalte*, die wiederum im Zugriff des kognitiven Apparates vielfachen Metamorphosen unterliegen. Zusätzlich kann die bewusste Kontrolle, die kritische Reflexion über diesen Zugriff gesteigert werden. Daher ist als allgemeines Lernziel des Mathematikunterrichts (nicht nur der Grundschule) zu fordern: Der Unterricht hat dahin zu wirken, dass der Schüler durch den Einsatz seines kognitiven Apparates Voraussetzungen und Vorgegebenheiten für mathematische Sachverhalte erzeugt und reflektierend so verändert, dass dabei die *Urteilkraft seines Verstandes*, nämlich die kritische Reflexion (wohl einziges Moment der Freiheit im Denken!) beim bewussten Einsatz seiner Abstraktions-Fähigkeiten gestärkt wird. Diese Urteilkraft ist für das Entstehen und in der systematischen Entwicklung und Darstellung von Mathematik intensiv und extensiv erforderlich (wie kaum in einer anderen Wissenschaft) und sie kann durch den Mathematikunterricht (wie kaum durch einen anderen) herausgefordert werden. Dieses allgemeine Lernziel ist zugleich ein Bildungsziel, weil der Mensch auf diese Weise in der Freiheit seiner kritischen Reflexion und Distanzierung Mathematik durch sein persönliches Handeln und Denken *verwirklicht* und dieses Verhalten auch *verantwortet*. Dies ist eine (ethisch vertretbare) Form von Selbstverwirklichung.

Das genannte einzige allgemeine Lernziel ist angesichts der Sonderstellung der Mathematik unter den Geisteswissenschaften und ihres unbestritten hohen Ansehens über (inzwischen) Jahrtausende berechtigt und nicht unbescheiden. Aber diese Sonderstellung der Mathematik macht das Schulfach umso anfälliger dafür, die Idee eines bildenden Unterrichts zu verfehlen. Wir müssen damit aufhören, Mathematik kübelweise über den Köpfen der Kinder auszuschütten. Das ist vertane und verlorene Zeit. Das Schulfach Mathematik kann nur zu einem Bildungsfach werden, wenn das, was die Wissenschaft Mathematik als ihre fundamentalen Objekte betrachtet, durch die kognitiven Prozeduren des Kindes in seinem Denken eigenständig *erzeugt* wird und in *Metamorphosen* zu mathematischen Objekten weiter entwickelt wird. Bisher wurde diesen Metamorphosen viel zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt, so dass der Unterricht kaum zu einer kontinuierlichen Bildung beitragen konnte. Mathematik kann kein Bildungsfach sein, weder als Wissenschaft noch als Schulfach, wenn das Kind im Unterricht nicht ein (noch so geringes) Wachsen seines Ichbewusstseins (seiner Urteilskraft) erfährt. *Die Frage, was Mathematik zur Bildung des Menschen beitragen kann, ist einfach zu beantworten: nichts! weil sich der Mensch als Person in den Grenzen seines Denkens und Handelns selbst bildet.* Mathematik ist als geistiges Kulturgut aus solchen Bildungsprozessen des Menschen hervorgegangen. Der *Mensch* hat zur Entstehung von Mathematik, hat zu ihrer Bildung beigetragen. Der junge Mensch wird mathematisch nur gebildet, wenn er zur Bildung (Entstehung) von Mathematik beiträgt, und sei seine Erkenntnis für die Allgemeinheit noch so geringfügig. Deshalb werden wiederum nur durch persönlichen, selbstkritischen Einsatz aller Abstraktionsfähigkeiten mathematische Sachverhalte für den jungen Menschen zu einem Bildungsgut. Mathematik darf daher dem jungen Menschen nicht wie eine geistige Phalanx gegenübergestellt werden, mit der er sich „auseinanderzusetzen“ habe, um in dieser Auseinandersetzung Erfolg zu haben oder Federn zu lassen. *Man müsste daher Lehrern verbieten, Mathematik so zu unterrichten, als sei sie ein Selbstzweck, dem es uneingeschränkt und respektvoll zu huldigen gilt.* Denn diese Eitelkeit verdammt viele Schüler zu geistiger Ohnmacht, so dass für sie die Mathematik zu einem Zuchtmeister und Selektionsinstrument verkommt, das es lebenslänglich zu meiden gilt. Man muss unabhängig von Mathematik danach fragen, wie Bildungsprozesse im Menschen möglich sind und ob bzw. wie der Mathematikunterricht darin einen Platz finden kann.

Der genannte allgemeine Bildungsauftrag ist im Rahmen der individuellen Möglichkeiten und der Veranlagung der Schüler zu erfüllen. Einerseits sind also der Erfüllbarkeit dieses Auftrages individuelle Grenzen gesetzt; andererseits ist das Verstehen ein unbegrenzter Prozess, der sowohl wissenschaftliche als auch subjektive „Haltepunkte“ erreicht, insofern es kurz- oder langfristig nicht gelingt, einen (relativ) verstandenen Sachverhalt in noch umfassendere Zusammenhänge einzuordnen. Daher darf der Bildungsauftrag der Schule inhaltlich überhaupt nicht eingeschränkt oder abgegrenzt werden. Alle inhaltlichen Anforderungen müssen als *Mindestforderungen* gelten, damit begabte und hochbegabte Kinder nicht vergammeln, sondern in ihren Fähigkeiten ausgereizt werden. In der Grundschule können Kinder beim Rechnen am Abakus durchaus *verstehen*, dass das Dividieren bei $13 : 7$ zu einer periodischen Dezimalzahl führt (1,857142 85...) und wie man dann beim Addieren solcher Zahlen vorgehen könnte. Dieser Verstehenshorizont wird später durch das Rechnen mit Bruchzahlen erweitert. Ohne Kenntnis solcher Verstehenshorizonte, die mit Schwierigkeitsgraden gar nichts zu tun haben, wird es nicht gelingen, den Bildungsauftrag der Schule zu erfüllen. Aber selbst die Kommission der Bildungsstandards kennt solche relativen Verstehenshorizonte offenbar nicht, weil sie es als Ziel der Primarstufe ansieht, „ein *gesichertes* Verständnis mathematischer Inhalte“ zu entwickeln (S. 6). Das ist wie eine Botschaft von einem anderen Stern: Wenn es doch nur ein gesichertes Verständnis darüber geben würde, was ein gesichertes Verständnis ist! Es gibt kein absolut gesichertes Verständnis mathematischer Inhalte; alle hängen ab von unbeweisbaren Annahmen, zu denen

man nicht einmal im Gymnasium vordringt. Zu dieser lediglich relativen Sicherheit kommt die Unsicherheit, ob ein Beweis korrekt geführt sei. Und selbst darüber, was hierbei Korrektheit sein soll, gibt es keine allgemeine Sicherheit. Wenn mit mathematischen Beweisen nicht dieses Bewusstsein beim Schüler verbunden werden kann, dann sind diese Beweise nichts anderes als eine gewaltige Irreführung – und die kommt dann in solchen „Botschaften“ zutage. Statt dies klar herauszustellen, ergeht sich die Fachdidaktik nur andauernd in Ermahnungen, das Kind müsse angehalten werden, seinen empirischen Befunden und Vermutungen gründlich zu misstrauen (vor allem darin keine Beweismöglichkeit zu sehen), obwohl die Bewährung solcher Vermutungen seit eh und je die Vertrauensgrundlage dafür bildet, sie zu Theorien auszubauen.

(VI) Aufgrund der Mobilisierung des kognitiven Apparates kommt es durch das Wechselspiel von Erwartung und Erfahrung (also in Lernprozessen)

- (1) ... zu **Akten des Verstehens**: Vermutungen kommen auf und werden an ihren Konsequenzen geprüft; diese Prüfung führt zur *Einsicht* in einen Irrtum oder in regelhafte Zusammenhänge. Im letzten Falle werden die Vermutungen weiterer *prospektiven* Bewährung in (riskanten) *Prognosen* ausgesetzt (wenn X der Fall ist, wird auch Y eintreten). Die Folgezusammenhänge werden bis zur Irrealität formalisiert (wenn X der Fall wäre, dann wäre Y der Fall), die sich hinter der idealisierten Form mathematischer Gesetzmäßigkeiten mit ihren überzeitlichen Formulierungen verbirgt. Werden die Folgezusammenhänge mit anderen in einen stimmigen Systemzusammenhang gebracht, so spricht man von Beweisen. Beweise sind der Nachweis systematischer Abhängigkeiten. Die Einsicht in regelhafte Zusammenhänge führt aber auch zur *retrospektiven* Bewährung von Vermutungen in *Erklärungen* oder Begründungen (X ist oder war der Fall, weil Y der Fall war).
- (2) ... zu **Akten des Bedeutens**: Zeigen, Hinweisen, Hindeuten, versuchsweises Deuten von Objekten als Zeichen für etwas, Rückmeldungen und eventuell erforderliches Umdeuten führen zwischen Gesprächspartnern zur *Verständigung* und zu Konventionen über den Gebrauch von Zeichen.
- (3) ... zu **Akten des gezielten Handelns**: Über zweckbestimmte Tätigkeiten (die u.U. ihren Zweck verfehlen können), über Varianten als zweckdienlich erkannter Tätigkeiten werden schließlich zweckmäßige Tätigkeiten als *Gewohnheiten* aufgebaut, eventuell instrumentalisiert und durch den Gebrauch von Instrumenten erleichtert. Das Auffinden und Erproben zweckdienlicher Tätigkeiten ist ein Lernprozess, der in den Bereich des *Übens* gehört. Im engeren Sinne meint man mit „üben“ die wiederholte (nicht unbedingt gleichartige) Ausführung einer zweckmäßigen Tätigkeit zum Erwerb einer (technischen) Fertigkeit (Einüben, Ausüben).

(VII) Jeder Akt des Verstehens, des Bedeutens oder des gezielten Handelns vollzieht sich als Lernprozess in den Modalitäten von Erwartung und Erfahrung und in ihm bilden sich als Ergebnisse des Lernens persönliche Einsicht, Verständnis und Gewohnheit, worin das Streben nach Gewissheit und Geborgenheit eine gewisse Erfüllung findet, ohne jemals einen absolut konstanten Zustand zu erreichen. Dieser und nur ein solcher Lernprozess ist ein Prozess der Bildung; er ist als Prozess immer endgültig, vom Inhalt her jedoch immer offen. Zudem gibt es keinen Akt gezielten Handelns ohne Beteiligung von Akten des Verstehens und des Bedeutens, sonst könnte der Mensch seine Erwartungen oder Handlungen nicht verändern und den Gegebenheiten besser anpassen.

Der Mathematikunterricht kann nicht dadurch zu einem Bildungsfach werden, dass er den Schüler schritt- und häppchenweise immer mehr „mathematische Kompetenzen“ (kumulativ) erwerben lässt, sondern nur durch die Ermöglichung persönlicher Lernprozesse im vorgestellten Sinne (also ganz oder gar nicht). Wenn für den Schüler im Mathematikunterricht kein persönlicher Lernprozess durch Erwartung und Erfahrung (einschlägiger Sachverhalte) ermöglicht wird, dann kommt es zu der Situation, die wir landauf-, landab beobachten: Der Schüler versteht nichts, er weiß nicht, was die Zeichen, mit denen er umgeht, bedeuten, und er geht mit diesen Zeichen geradezu zwanghaft nach vorgesetzten Regeln um, ohne gezielte Handlungen mit diesen Automatismen verbinden zu können. Ein nutzloser Unterricht.

Es bleibt allerdings noch nachzuweisen, dass Mathematik als Produkt aus solchen Bildungsprozessen *entstehen* kann, d.h. als ein spezieller Bereich von Einsicht, Verständigung und Gewohnheit. Wenn nicht, sieht es um die Legitimation, Mathematik als allgemeinbildendes Fach in der Schule zu betrachten, schlecht aus.

(VIII) Es lässt sich zeigen, dass der Schüler unter normalen Umständen Zahlen und das Rechnen mit ihnen unter Einsatz seines kognitiven Apparates durch sein Handeln bewirken und in Umgangssprache beschreiben kann und dass er diese Handlungsobjekte allmählich durch fortschreitende Abstraktionen verschiedener Art zu mathematischen Objekten fortentwickeln kann. Auch für die Geometrie lässt sich der Nachweis führen, dass sie aus Handlungen des Lokalisierens hervorgehen kann. Diese Möglichkeiten legitimieren, falls sie durch genannte Lernprozesse realisiert werden, Mathematikunterricht als Bildungsfach in der Grundschule.

Handlungen und ihre Ergebnisse werden als *Wirkzusammenhang* verstanden und beschrieben („Ich habe 12 Steinchen in lauter Dreier-Häufchen zerlegt und jetzt sind vier gleiche Häufchen vorhanden.“) Durch Generalisierung, Objektivierung und Formalisierung gehen diese Beschreibungen über in *Begründungszusammenhänge* („Es sind vier gleiche Häufchen entstanden, weil ich aus 12 Steinchen lauter Dreier-Häufchen gemacht habe.“), in denen der Mensch sich selbst als Ursache des Ergebnisses sieht; des weiteren in *hypothetische Zusammenhänge* („Wenn ich 12 Steinchen in Dreier-Häufchen zerlege, dann werden vier gleiche Häufchen entstehen – ob ich es mache oder nicht.“) und schließlich in *objektive Implikations- (bzw. Folge-)Zusammenhänge*: „Wenn 12 Steinchen in lauter Dreier-Häufchen zerlegt werden, dann ergibt das notwendig immer vier gleiche Häufchen.“ Dadurch ändert sich die Bedeutung der Beschreibungen, ohne dass ihr Zusammenhang zerbricht (Bedeutungszusammenhänge). Man sollte sich klar darüber sein, dass die Beschreibung eines ursprünglichen Wirkzusammenhangs, wie er beim ersten Rechnen vorliegt, durch die Gleichung „ $12 : 3 = 4$ “ sämtliche soeben dargestellten Übergänge ignoriert und ausschaltet, so dass Verstehen unmöglich gemacht wird. Wenn Zahlengleichungen nicht als Schlussfolgerungen interpretierbar sind und bleiben, brauchen wir uns nicht zu wundern, dass verständiges Sachrechnen durch den Unterricht geradezu verhindert wird.

Dass das Lokalisieren zur (euklidischen) Geometrie führt, ersieht man aus folgendem: Um die Ortsbestimmung eines Gegenstandes vorzunehmen, braucht man im einfachsten Falle einen festen *Standort* (ein Bezugssystem) und man muss wissen, in welcher *Richtung* und *wie weit* man sich bewegen muss, um zu dem Gegenstand zu gelangen. Es gibt dreierlei Richtungen: die Gehrichtung (z.B. vorwärts, nach rechts), die Sehrichtung (geradeaus) und die Drehrichtung (z.B. rechts herum). Demnach gibt es auch dreierlei Entfernungen: wie weit gehen (z.B. geradeaus oder auf einer gekrümmten Bahn bis zu dem Haus dort), wie weit sehen (z.B. bis zum Horizont), wie weit drehen (z.B. Viertel-, Halbdrehung). Um irgendeine euklidische Figur zu beschreiben, braucht man ebenfalls nur Richtungen und Entfernungen von einem Standort aus. Das Lokalisieren ist die Grundlage und das Elixier sämtlicher geometrischer Betrachtungen in der Grundschule (s. auch folgende Texte).

(IX) Als Konsequenz aus diesen Überlegungen sind die folgenden fünf *struktur-erzeugenden Handlungskomplexe* im Mathematikunterricht der Grundschule als *übergeordnete Lernziele* vorzusehen, die sich über die ersten vier Schuljahre zu erstrecken haben:

◀(1) Der Schüler soll *zählen*: Damit sind primär Handlungen des Herstellens und Verwendens von Anzahlen als expliziter oder restringierter Zeichen für Vielheiten gemeint, wobei als Zahlmaterial vor allem Steinchen, Kerne, Bohnen, Plättchen, Würfelchen und die Finger dienen. Sekundär sind auch Handlungen des Herstellens schriftlicher Zeichen gemeint: Striche, Punkte und Ziffern. Als akustische Formen von Zahlen kommen vor allem die Zahlwörter in Frage. Die Restriktion der expliziten Zahlen ist über das Bündeln bis zum generellen Verständnis des Stellenwertsystems (dekadisch und nicht-dekadisch) ausnahmslos auf Handlungsbasis (insbesondere am dekadischen Abakus) durchzuführen; dabei sind auch Dezimalzahlen zu berücksichtigen. Zum Verständnis der Nachkommastellen sind Bruchzahlen (ohne Bruchrechnen) generell inhaltlich über die Grundhandlung des Teilens einzuführen: „fünf der sieben Teile von ...“ (= fünf Siebentel von ...). Zur Zahlverwendung gehören (neben den Anzahlen) vor allem Ordnungszahlen, Unterschiedszahlen und Maßzahlen.

◀(2) Der Schüler soll *rechnen*: Das Rechnen vollzieht sich primär in Handlungen des sammelnden oder teilenden Veränderens von Zahlen nach semantischen und syntaktischen Regeln. Die semantischen Regeln des Rechnens werden aus Sachbezügen abgeleitet. So ist z.B. das Zusammenhalten zweier Fingerzahlen (als Zeichen dafür, wie viele Puppen zwei Kinder gemeinsam haben) bereits ein perfektes Addieren, das auch durch den anschließenden Gebrauch schriftlicher Symbole und verbaler Fassungen noch nicht zu einer mathematischen Funktion wird. Das gelingt erst durch den Verzicht auf jegliche konkrete Zahlsymbolik und hat in der Grundschule nichts verloren. Der Schüler soll auch in der Lage sein, das Multiplizieren auf das Addieren, das Dividieren auf das Subtrahieren zurückzuführen, und er soll die Rechenvorgänge bei größeren Zahlen durch solche Zurückführung erklären können. Die syntaktischen Regeln des Rechnens betreffen vor allem die Veränderung restringierter Zahlen. Der Schüler soll diese Rechenregeln durch Rückgriff auf die semantischen Regeln und die Restriktions-Regeln (im Zusammenhang mit memorierten Zahlensätzen) bis zu Kurzformen des Rechnens am dekadischen Abakus weiter entwickeln. Er soll dabei auch algebraische Gesetzmäßigkeiten (z.B. das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz) aus anschaulichen Zusammenhängen selbst erkennen und ohne deren formale Beschreibung zum Erschließen weiterer Rechenergebnisse und beim Erkunden von Rechenvorteilen einsetzen können. Dies gilt auch schon für das Memorieren des Einspluseins und des Einmaleins im ersten und zweiten Schuljahr, das grundsätzlich während des Unterrichtes durchzuführen ist und nicht überwiegend häuslichem Fleiß oder gar dem Zufall überlassen bleiben darf.

◀ (3) Der Schüler soll *messen*: Dies sind Handlungen des Vergleichens und des annähernd gleichmäßigen Portionierens kontinuierlicher (oder als solches gedachter) Objekte unter verschiedenen Gesichtspunkten (Reichweite, Überdeckungsweite, Platzbrauchen usw.); die Größe der Portionen wird als Maßeinheit festgelegt, die Anzahl der Portionen wird zur Maßzahl. Durch das Zählen kontinuierlicher Portionen (wie oft erscheint die Maßeinheit?) wandeln sich Anzahlen zu Maßzahlen (auch in Form von Dezimalzahlen und Bruchzahlen).

◀ (4) Der Schüler soll *lokalisieren*: Handlungen des Auffindens von Objekten aufgrund von Lagebeschreibungen in Bezugssystemen des Bewegungsraumes; Bewegungen,

Bewegungsvorstellungen und Bewegungsspuren sowie die Unterscheidung von Standort, Richtung und Entfernung sind Grundlage für die Entwicklung idealisierter geometrischer Objekte: Punkte, gekrümmte und gerade Linien auf Oberflächen von Körpern unterschiedlicher Form.

◀ (5) Der Schüler soll *beschreiben*: Sprachhandlung zur gegenseitigen Verständigung über die Handlungen (1) bis (4) sowie deren Ursachen, Voraussetzungen und Folgen hauptsächlich in Umgangssprache; insbesondere gehört dazu die Kenntnis von Zahlwörtern und Ziffernzahlen im dekadischen System, die Sprech- und Schreibweise von Bruchzahlen, sowie die Kenntnis von schriftlichen Operations- und Vergleichssymbolen. Zur Benennung der algebraischen Gesetze bedarf es keiner Fremdwörter. Ikonisierende Beschreibungen sind nur insofern vorzunehmen, als dadurch einzelne Handlungsschritte (z.B. in einfach zu zeichnenden Zahlsymbolen: Striche oder Kringel) festgehalten werden; *sie dürfen nicht an die Stelle von Rechenhandlungen treten, soweit diese möglich sind*. Besonders wichtig ist die Beschreibung von Größenvergleichen und Zahlbeziehungen wie „ist mehr (weniger) als“, „ist drei mehr als“, „ist dreimal so viel wie“, „ist das Dreifache von“, „ist ein Drittel von“, „ist Vielfaches“, „ist Restlos-Teiler“, sowie von Zahlklassen (gerade, ungerade, zerlegbar, unzerlegbar). Bis zum Ende des zweiten Schuljahres ist von fremdsprachlichen Ausdrücken völlig abzusehen. Allerdings sollten Schüler bis zum Ende des vierten Schuljahres die Fachausdrücke „addieren (plus), subtrahieren (minus), multiplizieren, dividieren“ kennen; auch die Ausdrücke „Produkt (Faktoren), Quotient“ sind bei Bedarf einzuführen (und nicht auf Vorrat). Pfeildarstellungen für Operatoren sind unnötig; die Sprache der Gleichungen fängt diese Beschreibungsbedürfnisse auf; unterschiedliche Auffassungen der Syntax von Gleichungen sind in der Grundschule nicht zu diskutieren. Bei schriftlich verkürzten Rechenverfahren ist grundsätzlich kein Gleichheitszeichen zu verwenden, auch nicht beim Dividieren (schwedische Schreibweise bietet *beste* Übersicht und Kontrollmöglichkeit). Bei den Beschreibungen ist darauf zu achten, dass Kinder nicht in die Situation kommen zu meinen, sie seien zu dumm, diese Sprache zu verstehen. Typische Beispiele: „Fünf weniger drei ist zwei.“ (Korrekt wäre nur: „Zwei ist drei weniger als fünf.“) „Drei mal vier“ (korrekt: „dreimal vier“ – Malpunkt gehört zur *ersten* Zahl). „Zwölf durch drei“ (korrekt: Zwölf wird durch drei in vier Teile geteilt). „Mittelwert von Tagestemperaturen einer Woche“ hat mit „Mitte“ gar nichts mehr zu tun, sondern ist von der Halbierung der Summe zweier Zahlen (nicht einmal analog) übertragen auf mehr als zwei Zahlen. Differenzierende Symbole (z.B. beim Dividieren) und ausführliche Beschreibungen sind, um der Bildung willen, syntaktischen Vereinheitlichungen und sprachlich verschobenen (angeblichen) Fachausdrücken allemal vorzuziehen. Die schriftlichen Symbole der Mathematik sind hierbei nicht das eigentliche Problem, sondern die Art und Weise ihrer Verbalisierung. Nur diese Verbalisierung ist ja das Kommunikationssystem der Mathematik, ohne welches man keinen mathematischen Sachverhalt *besprechen* könnte; alles würde stumm in den schriftlichen Symbolen erstarren. Hinter den heute üblichen Formen dieser Verbalisierung erkennt man jedoch nur noch mühsam ihren Ursprung in umgangssprachlichen Ausdrücken der altgriechischen, arabischen oder lateinischen Sprache. Diese Tatsache wiederum führt zu dem vielfach vorgetragenen Irrtum, das Kommunikationssystem der Mathematik (vor allem!) sei nicht aus der alltäglichen Sprache erwachsen. Es ist tatsächlich daraus hervorgegangen. Dies gilt zumindest für die Arithmetik der rationalen Zahlen und die Zahlentheorie, aber auch für die Geometrie. Leider kann man es (aufgrund schlechter Übersetzungen) nicht mehr wahrhaben, dass z.B. für Euklid ein Quadrat *kein* Rechteck war, weil er mit „Rechteck“ (gr. wörtlich: „was eine andere Breite hat“) zwar rechte Winkel verband, aber

unterschiedliche Seitenlängen, also genau so wie das auch Schülern naheliegt. So absurd es klingen mag: Jedes Rechteck war für Euklid ein (entartetes) Quadrat – wie auch eine Ellipse ein entarteter Kreis ist.

Im Unterricht darf man bei der Verbalisierung der schriftlichen Symbole nicht bedenkenlos in die üblichen rudimentären Formen verfallen. Den Ausdruck „ $7 - 3$ “ sofort mit „sieben minus drei“ zu verbalisieren, scheint höchst einfach, ist aber *Arsen* für den Verstand des Kindes, weil für das Kind sprachlich nicht verständlich gemacht wird, an was für ein Geschehen es zu denken habe. Wenn wir es weltweit schon nicht schaffen, statt dessen konsequent „ $3 - 7$ “ zu schreiben (Funktionszeichen „ $3 -$ “, steht vorne) und zu lesen „drei weg von 7“ oder „drei weniger als sieben“ (ist vier) und dann grammatisch konsequent „drei minus sieben“ – wenn wir also über den Sprach-Schatten der Vergangenheit nicht springen können, dann müssen wir in den sauren Apfel beißen und beim Verbalisieren von „ $7 - 3$ “ den verbindlichen Gedanken vorwegnehmen: „von sieben fehlen drei“ oder „von sieben nehme (denke) ich drei weg“, was man früher ungeniert und richtig verkürzte zu „sieben weg drei“. Wir machen unsinnige Rechtschreibreformen, aber dringend nötige Sprachreformen machen wir nicht. Wir zeigen auch Kindern gegenüber hier keinerlei Entgegenkommen. Und da wollen wir Verbesserungen der Leistungen erreichen? Die Verbalisierungen gab es zum Teil lange vor den schriftlichen Symbolen; schon dabei wurden ausführliche Sprechweisen allmählich verkürzt. Die damit verbundene Problematik wird noch vergrößert, wenn man bedenkt, dass gleichlautende Ausdrücke unterschiedlichen Sprachschichten angehören können. So ist der Ausdruck „Teiler“ (lat. divisor) in „ $13 : 5$ “ für die Zahl „fünf“ ein *meta-sprachlicher* Ausdruck, den man für die Verbalisierung des Terms „ $13 : 5$ “ nicht braucht. Dagegen ist er bei „ $5 \mid 20$ “, verbalisiert zu „fünf ist Teiler von 20“, ein *objekt-sprachlicher* Ausdruck für die Relation zwischen den beiden Zahlen, der auch inhaltlich mit dem ersten nicht gleichbedeutend ist, weil letzter im Unterschied zum ersten immer ein „Restlos-Teiler“ ist. Dennoch sind beide Verwendungsweisen dieselbe „Märchensprache“: In jedem Falle denkt man, eine Zahl selbst sei *von sich aus* in der Lage, eine andere zu zerteilen, d.h. so weit wie möglich in Portionen ihrer eigenen Größe zu verwandeln. Damit wird eine extreme Ausprägung mathematischer Objektivierung erreicht, die auch Kindern in märchenhafter Sprechweise vermittelt werden kann, wenn die Beschreibung der Handlung zu einem hinreichenden Verständnis geführt hat. Bis dahin wird „ $13 \div 5 = 2 \text{ Rest } 3$ “ gelesen: Wenn man von 13 so oft wie möglich 5 wegnimmt, kann man das zweimal tun und es bleiben 3 übrig. Eine für Kinder verständliche Verbalisierung hat durchaus ihre Vorläufer in der Entwicklung der mathematischen Fachsprache und sollte keineswegs einfach mit „Rückschrittlichkeit“ gleichgesetzt werden.

Mathematik entsteht allmählich durch Generalisierung, Objektivierung und Formalisierung von Beschreibungen, und zwar derart dass diese Beschreibungen nach syntaktischen Regeln verändert werden und die ursprünglichen Handlungen völlig ersetzen können. Dies soll in der Grundschule auch so weit wie möglich gefördert werden. Es darf aber nicht dazu führen, die genannten vier Basis-Aktivitäten zu vernachlässigen oder ganz auszusetzen, wie es derzeit schon in der zweiten Hälfte des ersten Schuljahres geschieht. Das Ersetzen von Handlungen durch deren Beschreibung (z.B. durch Bilder, durch Ziffernzahlen und Gleichungen) hat wiederum Psychologen unnötig dazu veranlasst, so etwas wie mentale Operationen als interne Fortsetzung von Handlungen anzunehmen, die dann angeblich ein Pendant zu den mathematischen Operationen seien. So wird bei Vernachlässigung der Basis-Aktivitäten eine Unbekannte durch die andere ersetzt und für den Schüler nichts gewonnen. Die Objekte der Mathematik sind ohnehin schon reine Illusionen, fiktive Gestalten. Wenn die konstruktive Psychologie *deren* „Konstruktion“ meint, so wäre das hinnehmbar; wenn sie aber gleichsam eine Doppel-Illusion aufbauen wollte (hier mathematische Objekte – hier die vermittelnden mentalen Konstrukte), dann wäre das eine überflüssige Komplikation.

Durch ◀(1) werden Zahlen erzeugt als fundamentale konkrete Objekte; diese werden später zu mathematischen Objekten, wenn man den Zählvorgang und das Aufeinanderfolgen der Zahlen zur einer Funktion formalisiert. Diese Metamorphose wird durch andere (z.B. Zahlen als Rechenzahlen: Aggregations- und Systemzahlen) in der Grundschule vorbereitet, aber nicht vollzogen. Durch ◀(2) werden Algorithmen erzeugt, die später zu berechenbaren Funktionen und zu Operationen formalisiert werden können. Durch ◀(3) werden Zeichen für Größen erzeugt, die später über die Betrachtung von Größen-Verhältnissen zu neuen Zahlbereichen führen. Bis dahin aber wird mit Maßzahlen auch gerechnet. Daher sind Zählen, Messen und Rechnen die Hauptaktivitäten, um eine mathematische Modellierung von Sachsituationen in die Wege zu leiten und die so erzeugten Modelle wiederum später formal zu beschreiben und schließlich als Gegebenheiten an und für sich zu betrachten. Auch das ist keine Aufgabe der Grundschule; in ihr wird keine Mathematik betrieben, sondern eine Propädeutik derselben im eigentlichen Sinne. Und das ist wahrlich genug. Mit mathematischen Kompetenzen hat die Grundschule nichts zu tun.

(X) Untergeordnete Lernziele des Mathematikunterrichts der Grundschule (1 bis 4):

►(1) Die Schüler sollen mit beliebig großen Zahlen am dekadischen Abakus sämtliche Grundrechenarten ausführen und dabei Strategien zur Verkürzung der Handlungsvorgänge nutzen können. Sie sollen diese Rechenhandlungen, auch ohne sie auszuführen, mit Ziffernzahlen übersichtlich beschreiben können. Die dabei entstehenden sogen. schriftlichen Formen des Rechnens brauchen nicht zu extremer Kürze entwickelt zu werden. Der Schüler braucht auch Wortzahlen nur bis zu „Million“ zu kennen; ansonsten können Ziffernzahlen digital gelesen werden.

►(2) Das sogen. mündliche Rechnen soll ab vierstelligen Zahlen nur noch als (begründetes) Schätzen (s. auch 4) durchgeführt werden; dabei sollen die beim Abakusrechnen erkannten Rechenvorteile genutzt und auch diskutiert werden. Das sogen. halbschriftliche Rechnen kann (als unnötig) vollständig unterbleiben, weil es zum Verständnis des analogen Rechnens im Stellenwertsystem nichts beiträgt, sondern dieses in einem Gestrüpp von Sonderstrategien untergehen lässt. Der Zahlenstrahl ist grundsätzlich als Recheninstrument ungeeignet und als solches nicht einzusetzen. Er dient vielmehr zur Veranschaulichung der Ordnung der Zahlen und mit der abstrakten Illustration von Sachsituationen als Vorbereitung auf das cartesische Koordinatensystem.

►(3) Beim Sachrechnen soll im 4. Schuljahr ein Taschenrechner verwendet werden. Der Schüler soll in der Lage sein, ein Schätzintervall (s. auch 4) für das zu erwartende Rechenergebnis im Kopf oder schriftlich zu bilden und nötigenfalls zu verkleinern.

►(4) Folgende einfache Größen sind durch Messvorgänge vom Schüler zu erschließen: Längen, Flächeninhalte und Volumina; Währung (Tauschwerte), Zeit, Gewicht, Häufigkeit, Durchschnittsgrößen als arithmetisches Mittel, Drittel, Viertel usw. Dabei sind Rundungsregeln aus dem Messen abzuleiten und Maßzahlen (als gerundete Größen) i. Allgem. nicht ohne Angabe des Fehlerintervalls zu verwenden; Rechnen mit in Sachbezügen selbst gewonnenen oder mitgeteilten Maßzahlen (schriftlich oder am TR). Folgende zusammengesetzte Größen sind durch Messen und proportionales Verteilen zu erschließen: Frequenzen (Anzahl pro...), Preis (Euro pro...), Verbrauch (Liter pro...), Geschwindigkeit (km pro...). Bei Aufgaben mit proportionalem Verteilen ist probierendem Verhalten der Vorzug einzuräumen vor stupide adressierten Verfahren (z.B. Einheit – Mehrheit). Ebenso bei einfachen Fällen von multi-portionalem

Verteilen („antiproportional“). Auch Wahrscheinlichkeit (im Sinne einer subjektivistischen bzw. personalistischen Interpretation, nicht als Grenzwert einer Folge relativer Häufigkeiten oder axiomatisch-inhaltslos usw.) kann als zusammengesetzte Größe aufgefasst werden: Die Anzahl der erwünschten (auch mit „günstig“ bezeichneten) Fälle (= Zufalls-Ergebnisse) wird gleichmäßig an die Anzahl aller möglichen Fälle eines Stichprobenraumes verteilt. Als Maßzahlen für Wahrscheinlichkeiten kommen auch in der Grundschule bereits Bruchzahlen in Frage. Die Subjektivität bei der Beurteilung der Frage „Wie sicher darf ich mir sein mit meiner Voraussage, dass X passieren wird?“ ist beim Menschen, im besonderen bei Kindern stark ausgeprägt, so dass auch hier ein radikaler Übergang zu einer rationalen Betrachtungsweise in der Grundschule nicht angebracht ist, und nicht durch rigide Verwendung von unverstandenen Fachausdrücken vorgetäuscht werden darf. Es ist auch nicht angebracht, die Ausdrücke „sicher, unmöglich, wahrscheinlich“ als *Grundbegriffe* zur Kenntnis zu bringen; das Kind muss *inhaltlich* erfahren können, was damit gemeint ist.

►(5) Maßeinheiten und ihre Beziehungen: Umrechnungen innerhalb eines Maßsystems (z.B. Zentimeter in Meter); Umrechnungen von einem Maßsystem in ein anderes desselben Größenbereiches (z.B. Kilometer in Meilen, Euro in Dollar); Umrechnungen aus dem Maßsystem eines Größenbereiches in ein Maßsystem eines anderen Größenbereiches (z.B. Kilometer in Zeit – über Geschwindigkeit; Kilometer in Volumen – über Verbrauch). Für das Verständnis aller dieser Umrechnungsarten ist die Kenntnis von Bruchzahlen und Dezimalzahlen erforderlich. Auch im 5. Schuljahr dürfen Umrechnungen nicht ohne diese Verständnisgrundlage durchgeführt werden, weil der Schüler mit ansonsten überflüssigen Sonderregeln überfrachtet wird (siehe das Problem der Nullen an Nachkommastellen!).

►(6) Geometrie: Lokalisieren von Objekten im subjektiven Bezugssystem des eigenen Körpers: die Lage von Teilen des eigenen Körpers (vorne, hinten, unten, oben, korrekte Benennung der bzgl. der Medianebene symmetrischen Körperteile mit „rechts“ und „links“; vor (hinten) mir, über (unter) mir, rechts (links) von mir. Geh-, Blick- und Drehrichtungen im subjektiven Bezugssystem: vorwärts gehen (rückwärts, aufwärts, abwärts, seitwärts, nach rechts, nach links); geradeaus gehen; im Kreis gehen; visieren; ich drehe mich rechts (links) herum (auf der Stelle, im Gehen). Lokalisieren von Teilen an Gegenständen: rechte Autotür, Vorderseite des Schrankes, rechte Schublade, rechtes Ufer, rechtes Ohr auf einem Foto, im Spiegel usw. Lokalisieren von Gegenständen in objektiven Bezugssystemen (z.B. in einer Wegefolge, einem Spielfeld, einem Plangitter). Spiegelungen als Erweiterung des menschlichen Sehraumes: Aus Spiegelbildern Rückschlüsse ziehen auf die Lokalisierung von Objekten im Bewegungsraum. Bilder von Spiegelbildern ebener Figuren *skizzieren* („Standlinie“ eines Durchsichtspiegels wird zur Spiegelgeraden abstrahiert); Spiegelbilder von Spiegelbildern (bei unterschiedlicher Stellung der Spiegel zueinander); Drehungen (Lokalisierung von Objekten im Bewegungsraum vor und nach Drehungen); Spiegel- und Drehsymmetrie an ebenen Figuren und Körpern ; formtreues Vergrößern und Verkleinern (Ähnlichkeit); Maßstäbe und maßstäbliche Zeichnungen einfacher Art; DIN A-Formate; Schattenbilder von regelmäßigen Polygonen, Kreisen, von Würfeln und Kugeln bei Parallel- und Punktlicht (Deckungsgleichheit, Ähnlichkeit, Affinität). *Keine geometrischen Abbildungen als Funktionen, keine Abbildungsgeometrie!* Winkel und deren Vergleich mit dem Zweibein (nicht mit Winkelmesser); rechte Winkel (zwischen lotrechten und waagrechten Linien, dann an sich schneidenden geraden Linien als gleich große Nebenwinkel); parallel verlaufende gerade Linien (an Faltarbeiten, mit Schnüren mit Schablonen; Skizzieren mit dem Geodreieck). Oberflächen-Krümmungen an

Körpern (wie verhält sich Papier, wenn man eine Kugel glatt einwickeln will, ein Zylinder, ein Kegel, ein Schlauch-Torus); Namen ebener Figuren (Dreieck, Viereck, ..., Kreis, Ellipse; Rechteck, Quadrat, Parallelogramm und Raute – ohne systematisierende Ordnungsgesichtspunkte und deren Konsequenzen. (Keine Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, keine einschränkende Axiomatik im Sinne der euklidischen Geometrie! Beim Skizzieren mit dem Geodreieck sollte mehr die Absicht und Argumentation des Kindes bewertet werden als die Genauigkeit.) Zerlegungen von Quadrat und Rechteck (Halbieren, Dritteln, Vierteln) mit einfachsten Hilfsmitteln (Falten, Schnüre spannen). Schnurkonstruktionen von Kreis und Ellipse (z.B. im Garten). Polyminos aus gleichseitigen Dreiecken, Quadraten (bis zu „Sechslingen“) und Würfeln; Aussortieren von Oberflächennetzen durch Bewegung oder Bewegungsvorstellung. Namen von geometrischen Körpern: Kugel, Kegel, Zylinder, Quader, Würfel. Abwicklungen der Oberfläche solcher Körper (Oberflächen-Netze auch von weiteren platonischen Körpern oder von einfachen archimedischen Körpern) und Bauen aus Oberflächenteilen (auch nach Schnittvorlagen). Lokalisieren (und nicht nur abzählen) von Flächen, Kanten und Ecken eines Würfels nach hinreichenden Festlegungen in Würfelnetzen (Voraussage durch Bewegungsvorstellungen, Prüfung durch tatsächliche Bewegungen). Lokalisierung der Flächen eines Spielwürfels (z.B. 6 ist rechts, wenn 1 links ist) bei festgelegter Ausgangslage und voraussehbare Lokalisierung derselben nach tatsächlichen oder vorgestellten Kipp- oder Drehbewegungen des Würfels (Unterscheidung von rechtshändigen und linkshändigen Würfeln!). Gerade Wege auf ebenen und gekrümmten Oberflächen (Würfel, Quader, Kugel, Kegel, Zylinder). Gebräuchliche Knotenformen an Reepschnüren demonstrieren und immer wieder Gelegenheiten zum Anwenden bieten.

(XI) Lernziele sind an sich keine Bildungsstandards; sie werden es auch nicht, wenn man sie so nennt oder als solche fordert; sondern sie werden es dann und nur dann, wenn in ihnen die *Art und Weise* des Lernens zum Ausdruck gebracht wird, die den Lernprozess des Kindes zu einem Bildungsprozess macht. Dies ist im Einzelnen nicht möglich. Deshalb kann man nur Lernprozesse *im Allgemeinen* als Bildungsprozesse fordern. Wie dieser Auftrag im Einzelnen zu erfüllen ist, liegt allein im Gestaltungsbereich des Lehrers. Es ist daher sinnlos, Bildungsstandards aufzustellen, weil man über eine Formulierung von Lernzielen (in welcher Form auch immer) doch nicht hinauskommt.

(XII) Der Schwerpunkt einer durch Mathematikunterricht vermittelten Bildung liegt im intellektuellen Bereich. Der junge Mensch kann daher durch die Beschäftigung mit Mathematik nur in einer einseitigen Weise zu seiner Bildung beitragen; insofern sollte der Mathematikunterricht in seiner bildenden Wirkung nicht überschätzt werden. Er bedarf der Ergänzung z.B. durch musische und emotionale Bildung, und er darf vor allem nicht der allgemeinen sprachlichen Bildung durch ängstliches und übereiltes Anstreben eines fachlich „restringierten Codes“ entgegenarbeiten. „Neue Sprache bringt Störung in der Verständigung, aber im kommunikativen Geschehen zugleich auch Überwindung der Störung. Mindestens ist das das ideelle Ziel aller Kommunikation.“ (GADAMER, Wahrheit und Methode II, S. 189)

In keinem anderen Schulfach treibt der Abbruch der Verständigung zwischen Lehrer und Schüler diesen so massiv und dauerhaft in einen (bereichsspezifisch) paranoiden Zustand wie im Mathematikunterricht. Wir wagen die Behauptung, dass die meisten als „rechenschwach“ deklarierten Kinder in der Grundschule (vor allem das Versagen von Migrantenkindern) auf dieses Konto gehen. Aber auch der gymnasiale Mathematikunterricht ist dagegen keineswegs gefeit. Mindestens dies sollte uns daran hindern, das Kommunizieren als allgemeine

mathematische Kompetenz zu vereinnahmen. Selbst als verbalsprachliche Kompetenz wäre Kommunikation noch zu eng gefasst. Auch gemeinsames Musizieren ist eine Form von Kommunikation. Viele (aber noch viel zu wenige) Schulen zeigen heute durch freiwillige Ergänzungs-Angebote beispielhaftes und verantwortliches Bildungsverhalten (Musiziergruppen, Theatergruppen, Yogagruppen usw.). Wenn aber Mathematikunterricht als Bildungsfach versagt, dann sind diese Angebote keine Bildungsergänzung, sondern nur eine Form von Kompensation zur Verdrängung anderweitiger schulischer Frustrationen.