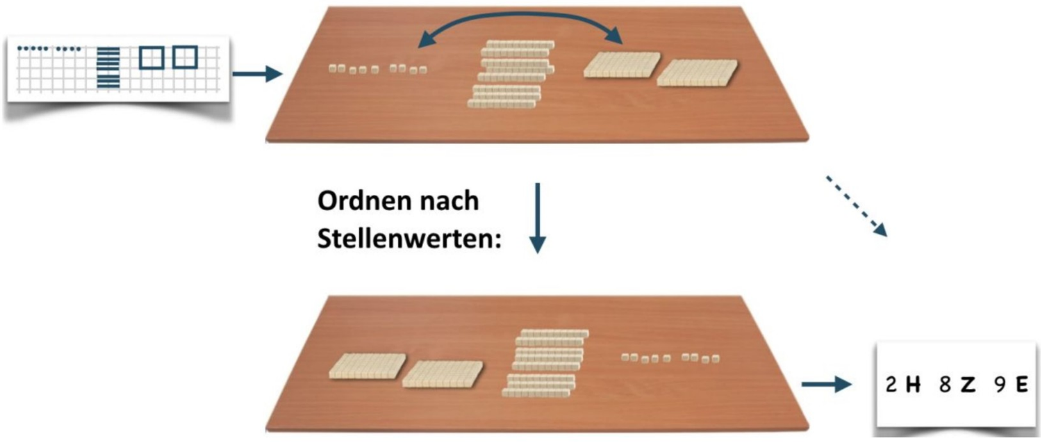
Michael Johann 19.10.2023

Rechnen wir quasi mit römischen Zahlen ?

Frage: Wo liegt der Fehler in der folgenden Abbildung aus „Zahlen darstellen“ von PIKAS ?



(https://pikas-mi.dzlm.de/node/636, Abb. 13)

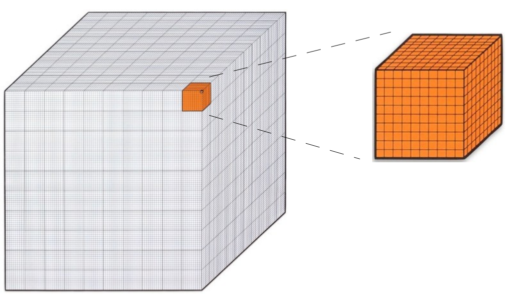
Auflösung: Einerwürfel/Zehnerstäbe/Hundertertafeln sind keine Ziffern eines Stellenwertsystems und haben somit keinen Stellenwert. Sie stellen Zahlen dar (oder sind Zahlen – je nach Sprachgebrauch oder Sichtweise), aber es sind eben keine Darstellungen in einem Stellenwertsystem. Denn egal, wo Einerwürfel/Zehnerstäbe/Hundertertafeln liegen, sie haben stets denselben Wert. Und durch einfache Addition dieser Einzelwerte erhält man den Gesamtwert der Zahldarstellung. Das ist wie beim Geld: Die Reihenfolge der einzelnen Scheine ist für den Gesamtbetrag irrelevant.

(https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=79391699)

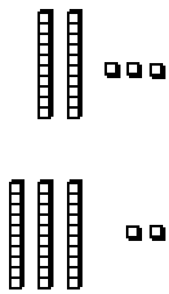
Ebenso haben alle vier Zahldarstellungen in der Abbildung von PIKAS den gleichen Wert bzw. stehen für die gleiche Zahl, auch wenn die beiden oberen unüblich sind. Die jeweilige Anordnung der Bestandteile ist irrelevant für die Zahl, die dargestellt werden soll. Die Darstellung könnte sogar völlig ungeordnet erfolgen, sie würde sich immer auf die gleiche Zahl beziehen. **Folglich bilden solche Zahldarstellungen kein Stellenwertsystem.** Denn in Stellenwertsystemen werden die elementaren Bestandteile einer Zahl, d.h. ihre Ziffern je nach ihrer Stelle innerhalb der Zahl gewichtet, d.h. mit dem Wert der Stelle multipliziert, so dass eine Umordnung der Ziffern i.Allg. zu einer anderen Zahl führt. Folglich ist es sinnlos, die Zahldarstellungen in der obigen Abbildung nach Stellenwerten ordnen zu wollen. **Sie werden nach dem Wert oder der Bündelstufe geordnet aber nicht nach *Stellen*werten.**

Ginge es nur darum den unpassenden Ausdruck in der obigen Abbildung durch einen passenderen zu ersetzen, dann könnte man die Sache auf sich beruhen lassen. Auch der hiesige Text wird vermutlich nicht frei von Ausdrücken sein, die andere als unpassend erachten. Aber das Missverständnis liegt weit tiefer und ist weit verbreitet. Denn man will ja gerade mit dem Einsatz solcher Bündelmaterialien das Verständnis des dekadischen *Stellenwertsystems* erleichtern und vertiefen.

Vorweg: Es gibt ohne Zweifel sehr schöne und didaktisch wertvolle Unterrichtsbeispiele bei denen das Zahlverständnis und die Einsicht in Zahlbeziehungen damit erleichtert und vertieft werden: etwa Größenvorstellungen in Verbindung mit Einerwürfeln, Zehnerstangen bis hin zum Millionenwürfel, oder die Differenzen von Spiegelzahlen (wobei letztere in Schulen selten vorkommen). Ein Verständnis von Stellenwertsystemen ist für diese Beispiele *nicht* erforderlich!



Millionenwürfel
(https://www.betzold.de/prod/86998/)

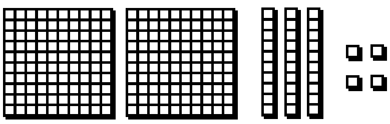


Spiegelzahlen
23 + 1 Z – 1 E = 32

In der Schulpraxis üblich und scheinbar alternativlos ist hingegen die Verwendung des Materials bei der Hinführung zum dekadischen Stellenwertsystem und bei der Begründung der schriftlichen Additions- und Subtraktionsverfahren. Wie kann das sein, wo es doch kein Stellenwertmaterial ist? Man mag einwenden, dass es ja nur der Veranschaulichung von Zahlen und Rechnungen im Stellenwertsystem dient. Doch inwieweit lässt sich so die Idee des Stellenwertsystems vermitteln? Denn Bündelmaterial hat etwa genauso viel gemein mit dem Stellenwertsystem wie die römische Zahlschrift, der man sich mit dem Stellenwertsystem so überlegen fühlt. Wer käme darauf, Kinder mithilfe der römischen Zahlschrift zum Stellenwertsystem zu führen?

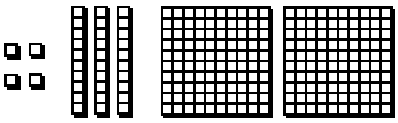
Was die römische Zahlschrift von einem Stellenwertsystem unterscheidet:
Die römische Zahlschrift ist wie das Bündelmaterial ein Additions- aber kein Stellenwertsystem. Der Wert einer römischen Zahl wird allein durch Addition (und ggf. Subtraktion) der verwendeten Ziffern gebildet: CCLXIII = $100 + 100 + 50 + 10 + 1 + 1 + 1 = 263$. Wäre die römische Zahlschrift ein Stellenwertsystem, dann wäre jede Ziffer noch mit dem Wert ihrer Stelle zu gewichten, was aber nicht geschieht. (Z.B. hat die Ziffer C in CX und in CXI den gleichen Wert 100 ohne Gewichtung der unterschiedlichen Stellen.) Außerdem kennt die römische Zahlschrift keine Null. Die Anordnung der Ziffern bei römischen Zahlen ist nur für die Subtraktionsregel relevant (IX = $10 - 1$ und XI = $10 + 1$), aber deswegen wird daraus noch kein Stellenwertsystem.

Fällt niemandem die Ähnlichkeit der Notation von Zahlen mit Quadraten, Strichen und Punkten (z.B. □□ |||| ⁚ für 2H 4Z 3E) zur römischen Zahlschrift auf? Wir müssen bei dieser nur den Ziffernvorrat auf C, X und I einschränken (vielleicht noch mit M, aber ohne D, L und V) und die Subtraktionsregel weglassen (sie wird ohnehin nicht immer angewandt, z.B. bei Inschriften auf Gebäuden oder bei Zifferblättern von Uhren). Diese quasi-römischen Zahlen unterscheiden sich von den römischen oft gar nicht, und ihre formale Struktur ist die gleiche wie die der Quadrat-Strich-Punkt-Notation.



CC XXX IIII

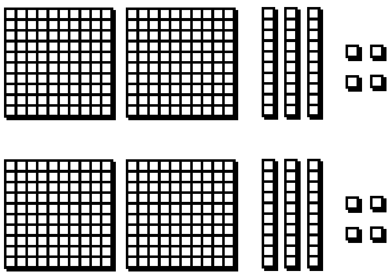
Die gleiche Zahl in anderer Anordnung:



IIII XXX CC

(Nebenbei bemerkt: Ein entsprechendes System wurde schon vor 5000 Jahren in Ägypten verwendet.)

Sieht man in der Didaktik diese Ähnlichkeit nicht, oder ist sie belanglos, da man ja in solchen Additionssystemen gut addieren und subtrahieren kann? (Ohne Ironie!) Z.B.: CC XXX IIII + CC XXX IIII = CCCC XXXXX X IIIII III.



CC XXX IIII

+

CC XXX IIII

CCCC XXXXX X IIIII III

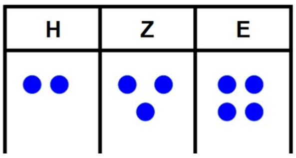
Diese quasi-römische Zahlschrift wirkt doch recht verschroben und didaktisch ungeeignet, da man einem C oder X weder ansehen kann, aus wie vielen Einheiten es besteht, und auch eine Ähnlichkeit zum haptischen Material nicht erkennbar ist. Aber eines zeigt der Vergleich: **Die Zahlen des haptischen Bündelmaterials sind im Prinzip nichts anderes als römische Zahlen – und diese haben keine Stellenwerte.**
Also wie führt man damit nun in der Schule zum Stellenwertsystem hin?

Der Zusammenhang zum Stellenwertsystem ergibt sich durch die Assoziation der Bündelstufen (Einer, Zehner, usw.) *allein* mit den Positionen der Ziffern. Da diese Zuordnung von Bündelstufen zu Positionen ohne die Verwendung weiterer Symbole (z.B. Buchstaben E, Z, H oder Farben) erfolgt, muss sie durch eine Konvention festgelegt werden: 1. Stelle ≙ Einer, 2. Stelle ≙ Zehner, usw. Somit gilt zwar einerseits 2H 8Z 9E = 9E 8Z 2H andererseits aber $2\,8\,9 \neq 9\,8\,2$, weil bei Letzterem die Bündelstufen fest mit der Reihenfolge der Ziffern assoziiert sind.
Es sind durchaus andere Konventionen denkbar, wo etwa die Einer links stehen also die Zählung der Stellen links statt rechts beginnt, so dass 2H 8Z 9E = 9 8 2 ist. Und mit dieser anderen Konvention gilt ebenfalls $9\,8\,2 \neq 2\,8\,9$.
(Das sollte bedacht werden, wenn man bei Kindern aufgrund von Zahlendrehern ein unzureichendes Verständnis des Stellenwertsystems vermutet. Vielleicht liegt in solchen Fällen eine individuelle Konvention vor, die sich von der herkömmlichen unterscheidet und

vielleicht auch zeitlich variabel ist. Das Problem ist dann eher kommunikativer Art als mathematischer – es muss dennoch behoben werden.)

Für den Übergang zum Stellenwertsystem werden außer der HZE-Notation (z.B. 2 H 8 Z 9 E) vor allem Tabellen in der Schule verwendet: Stellenwerttafeln. Davon gibt es zwei Typen, die sich im Wesentlichen durch ihre Verwendungsweise unterscheiden. In beiden Fällen stehen in der Kopfzeile die Bündelstufen.

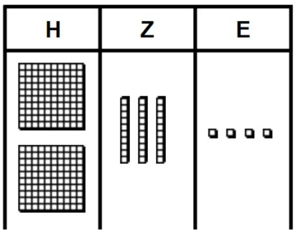
I: Die häufigste Verwendungsweise ist die, bei der die jeweilige Anzahl der Bündel als Ziffer oder loses Material ikonisch oder haptisch in der entsprechenden Spalte eingetragen wird:



oder

H	Z	E
2	3	4

II: Bei der anderen Verwendungsweise wird gleich das ganze Bündelmaterial in die entsprechenden Spalten einsortiert, statt nur die Anzahl der Bündel anzugeben:



Weder I noch II sind Stellenwertdarstellungen, obwohl man von Stellenwerttafeln spricht: Bei II ist das offensichtlich, und in I ist jede Ziffer durch die Spaltenüberschrift mit einem extra Zeichen für die Bündelstufe verbunden, wie in der HZE-Notation. Man kann die Spalten beliebig tauschen ohne die dargestellte Zahl zu ändern, sofern man sie vollständig tauscht: mit Spalteneintrag und -überschrift.
Der Schritt von I zu einer Stellenwertdarstellung ist jedoch naheliegend: Man blendet einfach die Spaltenüberschriften aus. Das würde bei II hingegen nichts Wesentliches verändern; diese Form dient also alleine der Sortierung des Materials.

Achtung: Die beiden Tabellenformen sind mathematisch nicht gleichwertig! Während bei I die gesamte Zahl durch Multiplikation der Spalteneinträge mit den jeweiligen Spaltenüberschriften gebildet wird: $2\cdot 100 + 3\cdot 10 + 4\cdot 1$, erhält man sie bei II einfach nur durch Addition der Spalteneinträge: 200 + 30 + 4. Eine Vermischung der beiden Formen führt zu Fehlinterpretationen: 200 H + 30 Z + 4 E statt 200 + 30 + 4.

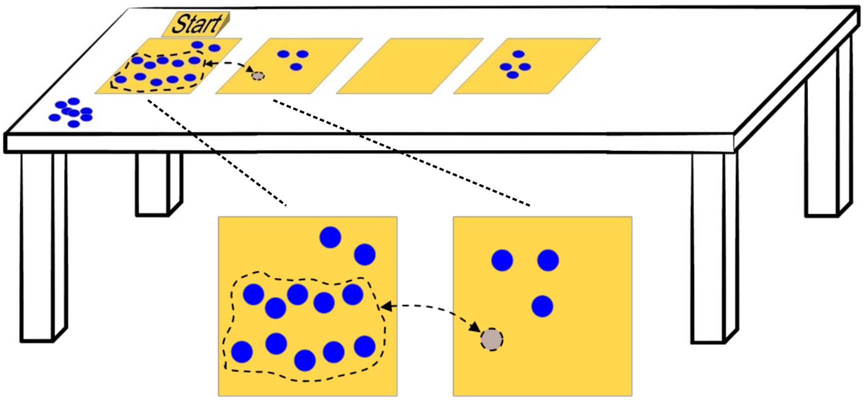
Man sollte die Tabelle in der Form II erst gar nicht verwenden, denn sie dient zum einen ja nur dem Sortieren, was auch ohne sie funktioniert, und sie bringt uns zum anderen nicht näher ans Stellenwertsystem, und darüber hinaus kann sie zu einem gravierenden Missverständnis führen.

Nun gut, es gibt einen gangbaren Weg vom Bündelmaterial zum Stellenwertsystem: Die Anzahl der unterschiedlichen Bündel wird in einer Stellenwerttafel mit fester Abfolge der Spaltenüberschriften notiert und diese werden schließlich entfernt. So macht man es i.Allg. und so macht man es schon lange Zeit (mindestens seit M. Montessori und Z.P. Dienes). Man muss aber die Fallstricke kennen und meiden.

Skepsis ist dennoch angebracht: Bündelmaterial und Stellenwertsystem sind wie zwei verschiedene Sprachen mit unterschiedlichen Grammatiken, und die Schule lehrt, diese Sprachen ineinander zu übersetzen. Aber lernen die Schüler auch, in der Stellenwertsprache zu denken? Müssen sie diese immer erst in die Bündelsprache übersetzen, um sie zu verstehen? Die schriftlichen Verfahren zur Addition und Subtraktion werden etwa nur mit Bündelmaterial begründet. Beispielsweise zeigt sich eine wesentliche Eigenschaft des dekadischen Stellenwertsystems beim Verzehnfachen, was aber landläufig nur im Hinblick auf die Notation – und arithmetisch nicht korrekt – mit „Anhängen einer Null“ beschrieben wird. Ein weiteres Indiz für eine fehlgeleitete Idee des Stellenwertsystems könnte die Schwerfälligkeit beim Erlernen fremder Stellenwertsysteme sein. So halten etwa viele Lernende auffällig lange an der Synonymität von „10“ und „zehn“ fest – ganz so, also stünde da nicht 10 sondern die römische Ziffer X.

Dass Zahldarstellungen eines Stellenwertsystems nicht als solche erkannt und behandelt werden, ist bei Zeitangaben ganz deutlich zu sehen. Denn Rechnungen damit werden oft nur durch die Umrechnung der gesamten Zahl in eine kleinere Einheit (alles in Minuten oder Sekunden) bewerkstelligt, also durch Übersetzung in die gewohnte Sprache des Zehnersystems. Direkt zu rechnen mit den üblichen Zeitangaben wird als schwer empfunden. Entsprechendes gilt für Winkelangaben im Gradmaß mit Minuten und Sekunden. Es handelt sich hier wie da um das älteste bekannte Stellenwertsystem, mindestens 900 Jahre älter als das Zehnersystem, und wir verwenden es heute ständig im Alltag – aber eben nur zur Notation. Es lässt sich naheliegend als 60er-System beschreiben (Stellenwertsystem zur Basis 60). Hingegen als 6×10er-System betrachtet (Stellenwertsystem mit alternierender Basis 10 und 6, d.h. es werden abwechselnd 10er- und 6er-Bündel gebildet) lässt sich damit (fast) genauso effizient rechnen wie mit dem dekadische Stellenwertsystem. Eine Interpretation mit Bündelmaterial wäre hier nur Ballast.

<u>Die Alternative zu Bündelmaterial fürs Rechnen in einem Stellenwertsystem zur Basis *b* ist ein Spiel:</u>
Es gibt ein Startfeld und jedes Feld hat potentiell einen Nachfolger – wie bei den natürlichen Zahlen. Das Startfeld ist in der einfachsten Spielvariante kein Nachfolger eines anderen Feldes; diese Einschränkung kann später entfallen. Es dürfen beliebig viele Spielsteine in die Felder gelegt werden. Und zwischen benachbarten Feldern dürfen die Steine nach folgender Regel getauscht werden, die wir *b-Tauschregel* nennen: *b* Spielsteine können gegen 1 Stein im Feld danach getauscht werden; und 1 Stein kann gegen *b* Steine im Feld davor getauscht werden.



Die Abbildung zeigt die Anwendung der Zehner-Tauschregel nur für die ersten beiden Felder. Sie ist aber für alle Paare benachbarter Felder gültig.

Nach einer beliebigen Anfangsbelegung der Felder mit Spielsteinen gibt es zwei mögliche Ziele des Spiels:
- Im einen Fall sollen am Ende möglichst wenige Steine insgesamt in den Feldern sein; man ersetzt also wann immer möglich *b* Steine gegen 1 im Feld danach.
- Im anderen Fall sollen am Ende möglichst viele Steine insgesamt in den Feldern sein; man ersetzt also wann immer möglich 1 Stein gegen *b* im Feld davor, so dass letztlich alle Felder außer dem Startfeld leer sind.

Das ist alles, was man für ein vollständiges Stellenwertsystem braucht. Addition und Subtraktion (mit Einschränkung auch Multiplikation und Division) werden vom Ballast des Bündelmaterials befreit und zu einem Kinderspiel, dessen Einführung bereits im 1. Schuljahr erfolgen könnte. Mit dem 3. Schuljahr wären die Grundrechenarten im Bereich der natürlichen Zahlen abgeschlossen, so dass im 4. Schuljahr viel Zeit vorhanden wäre, die Grundlagen der Brüche und der Bruchrechnung zu vermitteln.

Es bedarf aber möglicherweise eines Paradigmenwechsels nach T. Kuhn, um dieses Spiel als die elegantere Art der Einführung des Stellenwertsystems zu würdigen. Und so werden noch etliche Schülergenerationen das Rechnen mit Material lernen, das quasi die Struktur der römischen Zahlen hat und nicht die eines Stellenwertsystems.

Übrigens: Um die Spielregel für das oben erwähnte Stellenwertsystem mit alternierender Basis 10 und 6 (6×10er-System) zu beschreiben, denken wir uns die Felder nummeriert (das Startfeld hat die Nummer 1, sein Nachfolger die Nummer 2, usw.). Dann gilt:

I) Zwischen einem Feld mit ungerader Nummer u und seinem Nachfolger (Nr. u+1) gilt die Zehner-Tauschregel.
Das trifft z.B. auf das Startfeld zu, es hat die Nummer 1. Zwischen ihm und seinem Nachfolger (Nr. 2) werden 10 Spielsteine getauscht. D.h. 10 Steine im Startfeld werden durch 1 Stein im Feld Nr. 2 ersetzt; und entsprechend 1 Stein im Feld Nr. 2 durch 10 im Startfeld.

II) Zwischen einem Feld mit gerader Nummer g und seinem Nachfolger (Nr. g+1) gilt die Sechser-Tauschregel.
Das trifft z.B. auf das Feld nach dem Startfeld zu, es hat die Nummer 2. Zwischen ihm und seinem Nachfolger (Nr. 3) werden 6 Spielsteine getauscht. D.h. 6 Steine im Feld Nr. 2 werden durch 1 Stein im Feld Nr. 3 ersetzt; und entsprechend 1 Stein im Feld Nr. 3 durch 6 im Feld Nr. 2.