Michael Johann

3. Aufgabenblatt zur Vorlesung Sachrechnen und Größen (Winter 2018)

1a) Ein Messung liefert folgende Ergebnisse:
$a = (5 \pm 1)$ cm; $b = (18 \pm 2)$ cm; $c = (12 \pm 1)$ cm; $t = (3{,}0 \pm 0{,}5)$ s; $m = (18 \pm 1)$ g.
Berechnen sie mithilfe der Regeln zur Fehlerfortpflanzung bei den Grundrechenarten die folgenden Ausdrücke mit ihren Unsicherheiten und prozentualen Unsicherheiten:
(i) $a + b + c$, (ii) $a + b - c$, (iii) $c \cdot t$, (iv) $4a$, (v) $b/2$ und (vi) mb/t.

b) Berechnen Sie wie in a) die folgenden Ausdrücke:
(i) $(5 \pm 1) + (8 \pm 2) - (10 \pm 4)$; (ii) $(5 \pm 1)\cdot(8 \pm 2)$; (iii) $(10 \pm 1)/(20 \pm 2)$; (iv) $2\pi\cdot(10 \pm 1)$.

c) Berechnen Sie die Terme aus a) unter der Annahme, dass alle Unsicherheiten unabhängig und zufällig sind, d. h. unter Verwendung der quadratischen Addition.

2) Füllen Sie die Tabelle unter Verwendung der folgenden Messergebnisse aus:
$a = 50 \pm 5$, $b = 30 \pm 3$, $c = 40 \pm 1$, $d = 7{,}8 \pm 0{,}3$ (alles in cm).

	„maximale Fehleraddition“	„quadratische Addition“
a + b		
a + c		
a + d		

Wenn wir annehmen, die Unsicherheiten würden mit nur einer signifikanten Stelle benötigt. In welcher der drei Summen kann dann die zweite Unsicherheit (d.h. die von b, c oder d) völlig ignoriert werden?

3a) Eine Größe x werde fünfmal gemessen mit den Ergebnissen: 5, 7, 9, 7, 8.
Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{x}$ und die Standardabweichung σ_x.
(Rechnen Sie die Aufgabe selbst. Drücken Sie nicht nur die entsprechenden Knöpfe an Ihrem Taschenrechner. Geben Sie an, welche Definition von σ_x Sie verwenden.)

b) Zur Berechnung der Standardabweichung σ_x von N Messwerten $x_1,\dots, x_N$, benötigt man die Summe $\Sigma(x_i - \overline{x})^2$. Beweisen Sie, dass diese Summe wie folgt umgeschrieben werden kann:
$$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = (\Sigma x_i^2) - N\cdot \overline{x}^2.$$

c) Berechnen Sie die Standardabweichung für die Werte in a) mithilfe der Gleichung aus b) neu.

4) In der Tabelle sind 10 Messungen für die Länge und Breite eines Rechtecks notiert (s. Vorlesung: „Die Standardabweichung des Mittelwerts“). Berechnen Sie zunächst für jedes der 10 Paare von Messwerten die Fläche A des Rechtecks und dann den Mittelwert $\overline{A}$, die Standardabweichung σ_A sowie Standardabweichung des Mittelwerts $\sigma_{\overline{A}}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse für $\overline{A}$ und $\sigma_{\overline{A}}$ mit den Werten aus der Vorlesung, wo für $A_{Best} = \overline{\ell}\cdot\overline{b}$ verwendet und die Unsicherheit mit Hilfe der Regeln der Fehlerfortpflanzung bestimmt wurde.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ℓ	24,25	24,26	24,22	24,28	24,24	24,25	24,22	24,26	24,23	24,24
b	50,36	50,35	50,41	50,37	50,36	50,32	50,39	50,38	50,36	50,38
A										

5a) Eine Größe x wird wiederholt und sorgfältig gemessen. Das Endergebnis hat den Wert 9,5 mit der Standardabweichung 0,1. Theoretisch zu erwarten war jedoch der Wert 9,8. Ist diese Diskrepanz signifikant, wenn man davon ausgeht, dass die Messwerte normalverteilt sind mit Zentrum 9,8 und Standardabweichung 0,1 ?

b) Zwei verschiedene Messreihen für eine Größe x führen zu den Ergebnissen $x_A = 13 \pm 1$ bzw. $x_B = 15 \pm 1$, wobei die Unsicherheiten Standardabweichungen sind. Berechnen Sie die Differenz $x_B - x_A$ und ihre Unsicherheit. Ist die Diskrepanz signifikant?