4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik

Abgabe bis Mo., 27.05., 12 Uhr, in: Vorlesung / Übungen / Briefkasten Geb. I, Erdgeschoss.

1)

Eine Menge M mit einer Relation φ, Vorgänger-Relation genannt, ist ein Modell der natürlichen Zahlen, wenn folgende Aussagen zutreffen:

i) Es gibt ein Element α, das keinen Vorgänger hat, und jedes andere Element m hat genau einen Vorgänger $\varphi(m)$. D.h.: Die Vorgänger-Relation ist eine Funktion $\varphi\colon M\backslash\{\alpha\} \to M$.

ii) Unterschiedliche Elemente aus $M\backslash\{\alpha\}$ haben unterschiedliche Vorgänger: Für $m, n \in M\backslash\{\alpha\}$ mit $m \neq n$ gilt $\varphi(m) \neq \varphi(n)$, d.h. φ ist injektiv.

iii) Jedes Element m aus M ist ein Vorgänger, d.h. es gibt ein $m' \in M\backslash\{\alpha\}$, so dass $m = \varphi(m')$. φ ist also surjektiv.

iv) Jede nicht-leere Teilmenge, die von jedem ihrer Elemente – außer α - auch dessen Vorgänger beinhaltet, muss α beinhalten.
D.h.: Ist $B \subseteq M$, $B \neq \emptyset$ und ist $\varphi(b) \in B$ für alle $b \in B\backslash\{\alpha\}$, dann ist $\alpha \in B$.

(Axiomensystem der natürlichen Zahlen nach Willard Van Orman Quine, „Mengenlehre und ihre Logik", 1973)

a) Welches Axiom / welche Axiome sind bei folgender Struktur verletzt?
„$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow \ldots,\ \aleph_0 \leftarrow \aleph_1 \leftarrow \aleph_2 \leftarrow \ldots$" ($\aleph$: Aleph; „$x \leftarrow y$" steht für: x ist Vorgänger von y, $x = \varphi(y)$)

b) Zeigen Sie am Beispiel „$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$", durch welches Axiom / welche Axiome endliche Mengen ausgeschlossen werden.

c) Es sei A eine Teilmenge von M, die α beinhaltet. Und jedes Element aus A sei Vorgänger eines Elements, das ebenfalls in A liegt. D.h.: $\alpha \in A \subseteq M$ und zu jedem $a \in A$ existiert $a' \in A$, so dass $a = \varphi(a')$. Zeigen Sie, dass dann $A = M$ gelten muss. (Induktionseigenschaft)
(Tipp: Beweis durch Widerspruch. Nehmen Sie an, die Menge $M\backslash A$ sei nicht leer, und begründen Sie, weshalb mit jedem Element aus $M\backslash A$ auch dessen Vorgänger darin enthalten sein muss. Dann gelangen Sie mit einem der obigen Axiome zu einem Widerspruch.)

2) Die Anzahl der Elemente einer Menge A sei k, die der Menge B sei n ($n, k \in \mathbb{N}$).
Begründen Sie kombinatorisch, weshalb n^k die Anzahl der Abbildungen von A nach B ist.

3) Durch die folgenden Wertetabellen findet eine Zuordnung von Elementen einer Menge A zu Elementen einer Menge B statt. Notieren Sie in der Tabelle darunter, welche Eigenschaften diese Zuordnungen jeweils haben.

①
A:	
B:	Ø

(A={ }, B={Ø})

②
A:	♣	♦	
B:	Ø	Ø	∞

(A={♣, ♦}, B={Ø,∞})

③
A:	
B:	

(A={ }, B={ })

④
A:	♣	♦	♦
B:	∞	Ø	π

(A={♣, ♦}, B={Ø, ∞, π})

⑤
A:	♦
B:	

(A={♦}, B={ })

⑥
A:	♦
B:	∞

(A={♦}, B={∞})

⑦
A:	♣	♦	♠
B:	∞	∞	∞

(A={♣, ♦, ♠}, B={∞})

⑧
A:	♣	♦	♠
B:	∞	π	Ø

(A={♣, ♦, ♠}, B={Ø,∞,π})

⑨
A:	♣		♦
B:		Ø	∞

(A={♣, ♦}, B={Ø,∞})

⑩
A:	♣	♦	♠
B:	∞	∞	Ø

(A= {♣, ♦, ♠}, B={Ø,∞})

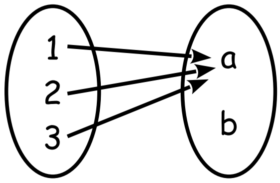
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
Abbildung										
injektiv										
surjektiv										
bijektiv										

4) Die *Potenzmenge* P(M) einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, also $P(M) = \{ X \mid X \subseteq M \}$. Bsp.: Für $M=\{1,2,3\}$ ist $P(M) = \{ \{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$

- Zerlegen Sie die Potenzmenge von $M=\{w, x, y, z\}$ vollständig in zwei (disjunkte) Teil mengen, von denen eine alle Teilmengen von M mit z beinhaltet. (Die andere ist dann folglich die Potenzmenge von $M\setminus\{z\}$.)
- Wie sieht man leicht, dass die beiden Teilmengen gleich viele Elemente haben? Beschreiben Sie den Zusammenhang als eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Teilmengen.

5) Ist f eine Abbildung von einer Menge A in eine Menge B. Dann ist für jede Teilmenge E von B die Menge $\{a \in A \mid f(a) \in E\}$ eine Teilmenge von A. In ihr liegen alle Elemente, deren Bild in E liegt; sie wird mit $f^{-1}(E)$ bezeichnet (f^{-1} heißt Urbildfunktion): $f^{-1}(E) := \{a \in A \mid f(a) \in E\}$.

Im Folgenden sei $f:\{1,2,3\} \to \{a,b\}$ definiert durch $f(1):=a$, $f(2):=a$, $f(3):=a$.



a) Geben Sie für jede Teilmenge E von $\{a,b\}$ die Menge $f^{-1}(E)$ an.

b) Zeigen Sie, dass $f^{-1}: P(B) \to P(A)$ zwar eine Abbildung aber weder injektiv noch surjektiv ist.

c) Definieren Sie selbst eine Abbildung $g: \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ so, dass g^{-1} nun aber injektiv ist.
Welche Eigenschaft muss g dafür haben? Geben Sie auch hier $g^{-1}(E)$ für jedes $E \subseteq B$ an.