

4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik

Abgabe bis Mo., 11.05., 12 Uhr, in: Vorlesung / Briefkasten Geb. I, Erdgeschoss.

1)

Eine Menge M mit einer Relation φ , Vorgänger-Relation genannt, ist ein Modell der natürlichen Zahlen, wenn folgende Aussagen zutreffen:

- i) Es gibt ein Element α , das keinen Vorgänger hat, und jedes andere Element m hat genau einen Vorgänger $\varphi(m)$. D.h.: Die Vorgänger-Relation ist eine Funktion $\varphi: M \setminus \{\alpha\} \rightarrow M$.
- ii) Unterschiedliche Elemente aus $M \setminus \{\alpha\}$ haben unterschiedliche Vorgänger:
Für $m, n \in M \setminus \{\alpha\}$ mit $m \neq n$ gilt $\varphi(m) \neq \varphi(n)$, d.h. φ ist injektiv.
- iii) Jedes Element m aus M ist ein Vorgänger, d.h. es gibt ein $m' \in M \setminus \{\alpha\}$, so dass $m = \varphi(m')$.
 φ ist also surjektiv.
- iv) Jede nicht-leere Teilmenge, die von jedem ihrer Elemente - außer α - auch dessen Vorgänger beinhaltet, muss α beinhalten.
D.h.: Ist $B \subseteq M$, $B \neq \emptyset$ und ist $\varphi(b) \in B$ für alle $b \in B \setminus \{\alpha\}$, dann ist $\alpha \in B$.

(Axiomensystem der natürlichen Zahlen nach Willard Van Orman Quine, „Mengenlehre und ihre Logik“, 1973)

a) Welches Axiom / welche Axiome sind bei folgender Struktur verletzt?

„ $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow \dots, \aleph_0 \leftarrow \aleph_1 \leftarrow \aleph_2 \leftarrow \dots$ “ (\aleph : Aleph; „ $x \leftarrow y$ “ steht für: x ist Vorgänger von y , $x = \varphi(y)$)

b) Zeigen Sie am Beispiel „ $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ “, durch welches Axiom / welche Axiome endliche Mengen ausgeschlossen werden.

c) Es sei A eine Teilmenge von M , die α beinhaltet. Und jedes Element aus A sei Vorgänger eines Elements, das ebenfalls in A liegt. D.h.: $\alpha \in A \subseteq M$ und zu jedem $a \in A$ existiert $a' \in A$, so dass $a = \varphi(a')$. Zeigen Sie, dass dann $A = M$ gelten muss. (Induktionseigenschaft)
(Tipp: Beweis durch Widerspruch. Nehmen Sie an, die Menge $M \setminus A$ sei nicht leer, und begründen Sie, weshalb mit jedem Element aus $M \setminus A$ auch dessen Vorgänger darin enthalten sein muss. Dann gelangen Sie mit einem der obigen Axiome zu einem Widerspruch.)

2) Die Anzahl der Elemente einer Menge A sei k , die der Menge B sei n ($n, k \in \mathbb{N}$).

Begründen Sie kombinatorisch, weshalb n^k die Anzahl der Abbildungen von A nach B ist.

3) Durch die folgenden Wertetabellen findet eine Zuordnung von Elementen einer Menge A zu Elementen einer Menge B statt. Notieren Sie in der Tabelle darunter, welche Eigenschaften diese Zuordnungen jeweils haben.

- ① $A: \underline{\quad}$
 $B: \emptyset$
($A = \{ \}, B = \{ \emptyset \}$)
- ② $A: \clubsuit \mid \spadesuit \mid \underline{\quad}$
 $B: \emptyset \mid \emptyset \mid \infty$
($A = \{ \clubsuit, \spadesuit \}, B = \{ \emptyset, \infty \}$)
- ③ $A: \underline{\quad}$
 $B: \{ \}$
($A = \{ \}, B = \{ \}$)
- ④ $A: \clubsuit \mid \spadesuit \mid \spadesuit$
 $B: \infty \mid \emptyset \mid \pi$
($A = \{ \clubsuit, \spadesuit \}, B = \{ \emptyset, \infty, \pi \}$)
- ⑤ $A: \spadesuit$
 $B: \{ \}$
($A = \{ \spadesuit \}, B = \{ \}$)
- ⑥ $A: \spadesuit$
 $B: \infty$
($A = \{ \spadesuit \}, B = \{ \infty \}$)
- ⑦ $A: \clubsuit \mid \spadesuit \mid \heartsuit$
 $B: \infty \mid \infty \mid \infty$
($A = \{ \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit \}, B = \{ \infty \}$)
- ⑧ $A: \clubsuit \mid \spadesuit \mid \heartsuit$
 $B: \infty \mid \pi \mid \emptyset$
($A = \{ \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit \}, B = \{ \emptyset, \infty, \pi \}$)
- ⑨ $A: \clubsuit \mid \underline{\quad} \mid \spadesuit$
 $B: \mid \emptyset \mid \infty$
($A = \{ \clubsuit, \spadesuit \}, B = \{ \emptyset, \infty \}$)

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
Abbildung										
injektiv										
surjektiv										
bijektiv										

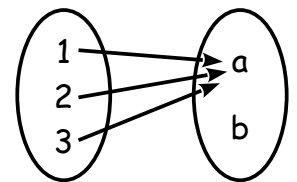
- ⑩ $A: \clubsuit \mid \spadesuit \mid \heartsuit$
 $B: \infty \mid \infty \mid \emptyset$
($A = \{ \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit \}, B = \{ \emptyset, \infty \}$)

- 4) Die Potenzmenge $P(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M , also $P(M) = \{ X \mid X \subseteq M \}$. Bsp.: Für $M = \{1, 2, 3\}$ ist $P(M) = \{ \{ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$
- Zerlegen Sie die Potenzmenge von $M = \{w, x, y, z\}$ vollständig in zwei (disjunkte) Teilmengen, von denen eine alle Teilmengen von M mit z beinhaltet. (Die andere ist dann folglich die Potenzmenge von $M \setminus \{z\}$.)
 - Wie sieht man leicht, dass die beiden Teilmengen gleich viele Elemente haben? Beschreiben Sie den Zusammenhang als eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Teilmengen.

- 5) Ist f eine Abbildung von einer Menge A in eine Menge B . Dann ist für jede Teilmenge E von B die Menge $\{a \in A \mid f(a) \in E\}$ eine Teilmenge von A . In ihr liegen alle Elemente, deren Bild in E liegt; sie wird mit $f^{-1}(E)$ bezeichnet (f^{-1} heißt Urbildfunktion): $f^{-1}(E) := \{a \in A \mid f(a) \in E\}$.

Im Folgenden sei $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ definiert durch $f(1) := a$, $f(2) := a$, $f(3) := a$.

- a) Geben Sie für jede Teilmenge E von $\{a, b\}$ die Menge $f^{-1}(E)$ an.
- b) Zeigen Sie, dass $f^{-1}: P(B) \rightarrow P(A)$ zwar eine Abbildung aber weder injektiv noch surjektiv ist.
- c) Definieren Sie selbst eine Abbildung $g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ so, dass g^{-1} nun aber injektiv ist.



Welche Eigenschaft muss g dafür haben? Geben Sie auch hier $g^{-1}(E)$ für jedes $E \subseteq B$ an.